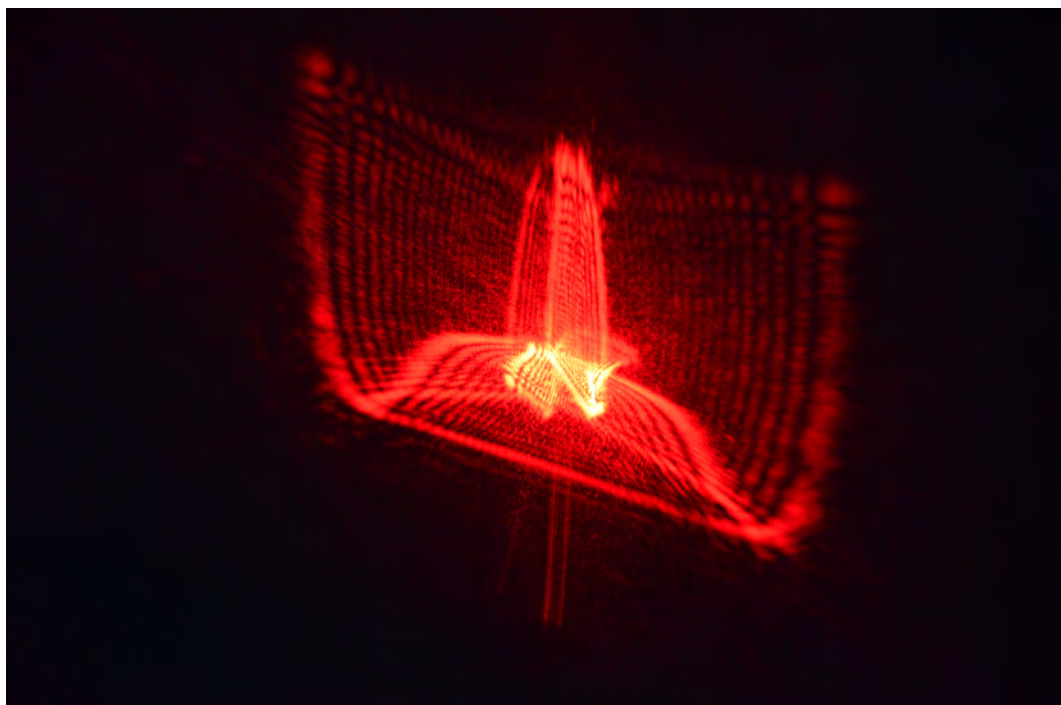


IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2025  
Letnik 72  
3

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije  
Ljubljana, NOVEMBER 2025, letnik 72, številka 6, strani 81–120

**Naslov uredništva:** DMFA Slovenije, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 500 **Elektronska pošta:** zalozba@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** SI56 0205 3001 1983 664  
**Mednarodna nakazila:** Nova Ljubljanska banka d.d., Ljubljana, Trg republike 2, Ljubljana **SWIFT (BIC):** LJBAS12X **IBAN:** SI56 0205 3001 1983 664

**Uredniški odbor:** Peter Legiša, Sašo Strle, Bojan Kuzma (urednik za matematiko), Aleš Mohorič (tehnični urednik, urednik za fiziko in odgovorni urednik), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešić, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl.

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.

Natisnila tiskarna DEMAT v nakladi 150 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 25 EUR. Naročnina za ustanove je 60 EUR, za tujino 35 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2025 DMFA Slovenije

Članki so objavljeni z licenco CC BY-SA

---

## NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, ključne besede in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov  $\text{\TeX}$  oziroma  $\text{\LaTeX}$ , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

# FOKUSIRAN GAUSSOV SNOP

ANDREJ PETELIN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani

Ključne besede: Fourierova optika, preslikave snopov svetlobe, skalarni snopi svetlobe, vektorski snopi svetlobe

V tem prispevku izpeljemo vektorsko metodo za izračun elektromagnetnega polja v okolici gorišča mikroskopskega objektiva z veliko numerično aperturo (NA), ki ga uporabimo za fokusiranje Gaussovega snopa. Pokažemo, da se polarizacijske lastnosti svetlobe v gorišču močno razlikujejo od snopa, ki ga fokusiramo z lečo pri majhnih NA, pri čemer uporabimo skalarno teorijo uklona na leči ali paraksialno aproksimacijo za izračun polja.

## FOCUSED GAUSSIAN BEAM

In this paper, we derive a vector method for calculating the electromagnetic field around the focal point of a large numerical aperture (NA) microscope objective used to focus a Gaussian beam. We show that the polarization properties of light at the focal point are significantly different from light focused by a small NA lens, where we use the scalar diffraction theory or the paraxial approximation to compute the field.

### 1. Uvod

Močno fokusirani vektorski snopi svetlobe imajo zanimive in uporabne lastnosti. Za razliko od skalarnih snopov svetlobe, kjer je polarizacija svetlobe konstantna in kaže smer vektorja polarizacije (oziroma smer električnega polja) ortogonalno na smer širjenja snopa ( $z$ ), je v močno fokusiranih vektorskih snopih prisotna tudi  $z$ -komponenta polja. Ta pojav omogoča uporabo snopov v superresolucijskih tehnikah, s katerimi pretentamo uklonsko limito in izboljšamo ločljivost, ali v optičnih pincetah za manipuliranje majhnih delcev v fiziki mehke snovi.

V tem prispevku se omejimo na fizikalni opis vektorskih snopov svetlobe, predvsem z vidika formiranja snopov z uporabo leč, ki delujejo pri velikih numeričnih aperturah (NA). V nadaljevanju opišemo, kako preslikave snopov svetlobe razumemo v okviru Fourierove optike, nato izpeljemo diskretni skalarni opis preslikav snopov svetlobe, na koncu pa model dopolnimo in izpeljemo diskretni vektorski opis transformacije snopov svetlobe. Model nato uporabimo za izračun elektromagnetnega polja v gorišču leče pri preslikavi Gaussovega snopa.

## 2. Fourierova optika

Pri širjenju svetlobe v homogenem mediju gre za sklopljeno nihanje električnega in magnetnega polja, ki ju v izotropnem mediju opisuje valovna enačba:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

pri čemer je  $\mathbf{E}$  električno polje,  $\mathbf{B}$  je magnetno polje,  $c = c_0/n$  je svetlobna hitrost v danem mediju z lomnim količnikom  $n$  in  $c_0$  je svetlobna hitrost v vakuumu. Rešitve valovne enačbe so ravni valovi, ki jih opišemo z valovnim vektorjem  $\mathbf{k}$  in jih zapišemo kot  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$  in  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Re \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$ , pri čemer je  $\omega$  krožna frekvenca valovanja. V optiki se velikokrat zadovoljimo s skalarno aproksimacijo in namesto z vektorskimi količinami  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{B}$  valovanje opišemo s skalarnim poljem  $u(\mathbf{r}, t)$ , ki je rešitev skalarne valovne enačbe:

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Na prvi pogled se zdi tak pristop identičen vektorskemu opisu polja, saj je valovna enačba, razpisana po komponentah, set skalarnih valovnih enačb. Vektorsko rešitev dobimo z množenjem skalarnega polja z ustreznim vektorjem polarizacije, na primer  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2}{n}} \mathbf{E}_0 u(\mathbf{r}, t)$ , kjer je faktor  $\sqrt{\frac{2}{n}}$  posledica normalizacije brezdimenzijskega skalarnega polja  $u(\mathbf{r}, t)$ , kot bomo videli nekoliko kasneje. V učbenikih po navadi tak pristop argumentirajo z besedami: “Če nas polarizacija svetlobe ne zanima, uporabimo skalarno aproksimacijo valovne enačbe, ki da zadovoljive rezultate.” Zavedati se namreč moramo, da za polje  $u(\mathbf{r}, t)$ , ki reši skalarno valovno enačbo (3), vektorsko polje  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2}{n}} \mathbf{E}_0 u(\mathbf{r}, t)$  sicer reši valovno enačbo (1), vendar v tem primeru ni nujno, da tako polje zadošča vsem Maxwellovim enačbam, na primer, da mora biti divergenca polja enaka nič  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . V primeru ravnega vala iz  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  sledi, da mora biti električno polje pravokotno na valovni vektor ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ ). Za širjenje v smeri  $z$  ima vektor električnega polja  $\mathbf{E}_0$  zgolj  $x$  in  $y$  komponenti. Za omejen snop svetlobe, ki se širi v smeri  $z$ , pa na splošno to ni res, zato ne moremo množiti skalarnega polja s konstantnim vektorjem  $\mathbf{E}_0$  in pričakovati, da pravilno opisujemo vektorsko polje svetlobe. Kasneje pokažemo, da je za vektorsko obravnavo vseeno

uporaben opis s skalarnim poljem, zato si najprej oglejmo, kako preslikave snopov svetlobe opišemo s skalarno teorijo.

V okviru skalarne aproksimacije se je razvila kompletna veja optike imenovana Fourierova optika s številnimi uporabnimi rezultati, od principa superpozicije, Fresnelovega uklonskega integrala do preslikav z lečami. Širjenje prostorsko omejenih svetlobnih snopov lahko opišemo s principom superpozicije, ki pravi, da snop svetlobe, ki se širi v smeri osi  $z$ , lahko zapišemo kot seštevek ravnih valov [2]:

$$u(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(k_x, k_y) e^{ik_x x + ik_y y} e^{iz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y, \quad (4)$$

pri čemer smo upoštevali, da polje zapišemo kot  $u(\mathbf{r}, t) = \Re u(x, y, z) e^{-i\omega t}$ , kjer je  $u(x, y, z)$  krajevni del polja  $u(\mathbf{r}, t)$  in je  $k = \omega/c$  valovno število. Vidimo, da je polje v izhodišču  $u(x, y, 0)$  inverzna Fourierova transformacija funkcije  $u(k_x, k_y)$ :

$$u(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(k_x, k_y) e^{ik_x x + ik_y y} dk_x dk_y = \mathcal{F}^{-1} \{u(k_x, k_y)\}, \quad (5)$$

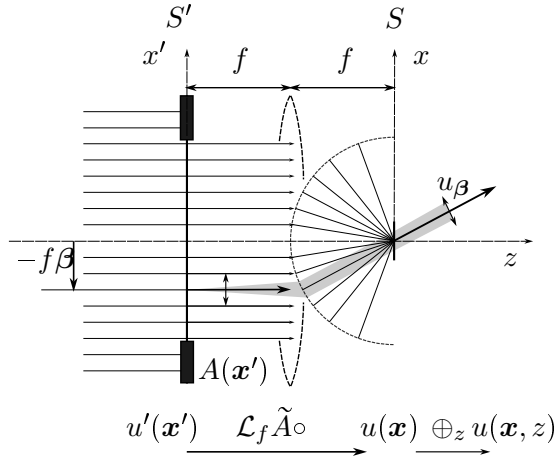
iz česar sledi  $u(k_x, k_y) = \mathcal{F} \{u(x, y, 0)\}$ , kjer je  $\mathcal{F}$  Fourierova transformacija. S principom superpozicije lahko torej izračunamo polje pri poljubni oddaljenosti  $z$  od izhodišča, če poznamo polje v izhodišču  $u(x, y, 0)$ :

$$u(x, y, z) = \oplus_z \{u(x, y, 0)\} = \mathcal{F}^{-1} \{\Phi_z(k_x, k_y) \mathcal{F} \{u(x, y, 0)\}\}, \quad (6)$$

pri čemer smo vpeljali operator širjenja svetlobe  $\oplus_z$ . Z dvodimenzionalno Fourierovo transformacijo  $\mathcal{F}$  polja v izhodišču koordinatnega sistema  $u(x, y, 0)$  dobimo amplitude  $u(k_x, k_y)$  ravnih valov, iz katerih je sestavljeno polje, nato za izračun polja pri izbrani koordinati  $z$  najprej posamezni ravni valovi pridobijo ustrezen fazni premik  $\Phi_z(k_x, k_y) = e^{iz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}$ , z inverzno Fourierovo transformacijo  $\mathcal{F}^{-1}$  pa rekonstruiramo polje po principu superpozicije.

Potrebujemo še operator preslikave leče, ki ga izpeljemo z uporabo Fresnelovega uklonskega integrala. Za idealno (tanko) lečo goriščne razdalje  $f$ , ki jo postavimo na razdalji  $f$  od svetlobnega polja, ki ga opiše funkcija  $u'(x', y')$ , dobimo v gorišču leče Fourierovo transformacijo polja  $u'$  [2]:

$$u(x, y) = \mathcal{L}_f \{u'(x', y')\} = \frac{1}{i\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u'(x', y') e^{-ik_0 x x' / f - ik_0 y y' / f} dx' dy'. \quad (7)$$



**Slika 1.** Shema preslikave ravnega vala z idealno lečo. Zaslonka  $A$  v ravnini  $S'$  določa numerično aperturo (NA) leče. Paralelni žarki se zberejo v gorišču leče v ravnini  $S$ . Pri majhnih vrednosti NA lahko preslikavo polja  $u'(\mathbf{x}')$  izračunamo z operatorjem  $\mathcal{L}_f$ , za izračun polja v okolici gorišča  $u(\mathbf{x}, z)$  pa uporabimo operator širjenja  $\oplus_z$ . Princip preslikave preko Fourierove transformacije je možno uporabiti tudi pri velikih vrednosti NA, kjer dopolnimo preslikavo  $\mathcal{L}_f$  tako, da upoštevamo vektorsko naravo svetlobe. Pri vektorski obravnavi posameznim komponentam skalarne polja  $u_\beta$  pripišemo ustrezen vektor polarizacije, kot je to razloženo v poglavju 4.

V okviru skalarne teorije lahko torej z uporabo enačbe za preslikavo leče (7) v kombinaciji z enačbo 6 izračunamo poljubne transformacije z lečami in širjenja polja v praznem prostoru. V našem primeru nas zanima oblika polja v okolici gorišča mikroskopskega objektiva (leče) v ravnini  $S$  pri preslikavah polja na vstopni strani objektiva v ravnini  $S'$  (slika 1). V ravnini  $S'$  se nahaja zaslonka z amplitudno prepustnostjo  $A(x', y')$ . Polje v gorišču leče je tako

$$u(x, y, z) = \oplus_z \{ \mathcal{L}_f \{ \tilde{A} \circ u'(x', y') \} \}, \quad (8)$$

pri čemer operator  $\tilde{A} \circ$  predstavlja prehod preko zaslonke. V prvem približku to operacijo izvedemo preprosto z množenjem polja  $u'(x, y)$  s funkcijo prepustnosti odprtine  $A(x, y)$ . V nadaljevanju si bomo ogledali, kako izračun (enačba 8) opravimo z uporabo diskretne Fourierove transformacije, nato pa bomo tehniko razširili še na vektorska polja in izračunali električne in magnetne komponente polja v okolici gorišča leče.

### 3. Skalarni opis

V nadaljevanju za poenostavitev zapisa vpeljimo krajevni vektor  $\mathbf{x} = (x, y)$ , prečni vektor širjenja

$$\boldsymbol{\beta} = (k_x/k_0, k_y/k_0) = n_i(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi) \quad (9)$$

in konstanto širjenja  $\alpha = k_z/k_0 = \sqrt{n_i^2 - \beta^2} = n_i \cos \theta$ , kjer  $\theta$  kot med smerjo valovnega vektorja in osjo  $z$ ,  $\phi$  je kot med smerjo projekcije valovnega vektorja na ravnino  $xy$  in smerjo osi  $x$ ,  $k_0 = \omega/c_0$ ,  $n_i$  pa je lomni količnik. Skalarnemu polju  $u(\mathbf{x})$  pripišemo matriko  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  velikosti  $N \times N$ , kjer je  $\mathbf{x} = p(n, m)$ ,  $p$  je velikost slikovne točke,  $m$  in  $n$  pa sta ustrezna indeksa v matriki,  $u_{m,n}$  pa je element te matrike. Tu smo upoštevali obrnjenost koordinatnega sistema v matrikah, saj  $u_{0,n} = u(x, y = 0)$  predstavlja elemente prve (zgornje) vrstice (os  $x$ ),  $u_{m,0} = u(x = 0, y)$  pa prvi (levi) stolpec matrike (os  $y$ ). Upošteevamo tudi, da elementi matrike  $u_{N-m, N-n} = u_{-m, -n}$  predstavljajo polje pri koordinati  $-\mathbf{x} = -p(n, m)$ .

Izbrali smo si računsko območje enakomernih dimenzij v smeri  $x$  in  $y$ . To seveda ni potrebno, vendar močno poenostavi implementacijo in interpretacijo rezultatov. V primeru kvadratne slikovne točke je torej slika tudi kvadratne oblike  $L \times L$ , pri čemer je  $L = Np$ . Obenem je v recipročnem prostoru slikovna točka tudi kvadratne oblike, kar poenostavi vizualizacijo polja. V recipročnem prostoru ravne valove karakteriziramo z vektorjem  $\boldsymbol{\beta} = \frac{2\pi}{Lk_0}(l, k)$ , pri čemer sta  $k$  in  $l$  indeksa komponent diskretne Fourierove transformacije. Fourierova transformiranka polja je matrika  $\hat{u}(\boldsymbol{\beta})$ , elemente matrike pa označimo z  $u_{k,l}$ . V nadaljevanju z  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  in  $c$  označimo matriko, vektor in skalar, v tem vrstnem redu.  $\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}$  in  $\tilde{c}$  so  $N \times N$  matrike matrik, vektorjev in skalarjev za množenje v realnem prostoru, medtem ko so  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{a}}$  in  $\hat{c}$   $N \times N$  matrike matrik, vektorjev in skalarjev za množenje v recipročnem prostoru, v tem vrstnem redu.

Pri prehodu na diskreten opis namesto integrala pridemo vsoto, zato je polje sestavljeno iz končnega števila ravnih valov. Princip superpozicije (enačba 4) se v tem primeru glasi:

$$u(\mathbf{x}, z) = \sum_{\boldsymbol{\beta}} a_{\boldsymbol{\beta}} e^{ik_0 \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x} + ik_0 \alpha z} \quad (10)$$

pri čemer vsota teče po vseh ravnih valovih z amplitudo  $a_{\boldsymbol{\beta}}$ . Če v enačbo 10 vstavimo  $z = 0$ , dobimo dvodimenzionalno diskretno Fourierovo trans-

formacijo. Komponente matrike  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  dobimo z inverzno Fourierovo transformacijo polja v recipročnem prostoru  $\hat{u}(\boldsymbol{\beta})$ :

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{i2\pi}{N}mk} e^{\frac{i2\pi}{N}nl} \hat{u}(\boldsymbol{\beta}), \quad (11)$$

medtem ko komponente polja v recipročnem prostoru  $\hat{u}(\boldsymbol{\beta})$  definiramo kot Fourierovo transformacijo polja  $\tilde{u}(\mathbf{x})$ :

$$\hat{u}(\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{F}\tilde{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{i2\pi}{N}mk} e^{-\frac{i2\pi}{N}nl} \tilde{u}(\mathbf{x}), \quad (12)$$

pri čemer sta  $\mathcal{F}$  in  $\mathcal{F}^{-1}$  diskretna Fourierova transformacija in njen inverz. V tipičnih numeričnih implementacijah (recimo v programskem jeziku python) sta to funkciji `fft2` in `ifft2`. Izbira normalizacije Fourierove transformacije je sicer poljubna, vendar je prikladno izbrati simetrično normalizacijo. Amplitude  $a_{\boldsymbol{\beta}}$  v enačbi 10 so pri tej normalizaciji  $a_{\boldsymbol{\beta}} = u_{k,l}/N$ . Operator širjenja svetlobe  $\oplus_z$  je:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, z) = \oplus_z \tilde{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathcal{F}^{-1} \hat{\Phi}_z \circ \mathcal{F} \tilde{u}(\mathbf{x}, 0), \quad (13)$$

pri čemer je  $\hat{\Phi}_z = e^{izk_0\hat{\alpha}}$  fazna matrika velikosti  $N \times N$ , ki jo dobimo iz matrike  $\hat{\alpha} = \sqrt{n_i^2 - \beta^2}$ ,  $z \circ$  pa označimo Hadamardov produkt, ki ga dobimo tako, da zmnožimo istoležne elemente matrik  $\hat{\Phi}_z$  in  $\hat{u}(\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{F}\tilde{u}(\mathbf{x}, 0)$ . Na podoben način lahko prevedemo uklonski integral (enačba 7) za preslikavo leče in dobimo:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_f \tilde{u}'(\mathbf{x}') = \frac{p'}{ip} \mathcal{F} \tilde{u}'(\mathbf{x}'), \quad (14)$$

pri čemer smo vpeljali velikost slikovne točke na vstopni strani leče kot  $p' = \frac{f2\pi}{Lk_0}$ . Krajevni vektor  $\mathbf{x}'$  namreč lahko povežemo z vektorjem  $\boldsymbol{\beta}$ , velja namreč  $\mathbf{x}' = -f\boldsymbol{\beta}$ . Izvor svetlobe, ki ga postavimo v  $\mathbf{x}' = -f\boldsymbol{\beta}$  v gorišču leče na vstopni strani leče v koordinatnem sistemu  $S'$  ustvari ravni val z vektorjem  $\boldsymbol{\beta}$  v gorišču na izstopni strani leče v koordinatnem sistemu  $S$ .

Pri numeričnih računskih metodah navadno zapišemo enačbe z brezdimenzijskimi količinami. Skalarni numerični model, ki smo ga izpeljali, zapišimo v kontekstu kasnejšega vektorskega modela, kjer vpeljemo kompleksno električno polje kot  $\mathbf{E} = E_0\boldsymbol{\mathcal{E}}$ , pri čemer je  $E_0$  poljubni faktor skaliranja, recimo  $E_0 = 1 \text{ V/m}$ , za pretvorbo med brezdimenzijskim električnim poljem  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  in pravim poljem  $\mathbf{E}$ . Intenziteto svetlobe (gostoto svetlobnega toka) za



ravni val zapišemo kot  $I = \frac{1}{2Z_i} |\mathbf{E}|^2$ , pri čemer je  $Z_i = Z_0/n_i$  impedanca medija,  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 377 \Omega$  pa je impedanca praznega prostora. V numeričnem modelu, ki ga bomo izpeljali, lahko torej intenziteto svetlobe vpeljemo kot  $I = I_0 \mathcal{I}$ , pri čemer je  $\mathcal{I} = \frac{n_i}{2} |\mathcal{E}|^2$  brezdimenzijska intenziteta in  $I_0 = \frac{|E_0|^2}{Z_0}$  ustrezen normalizacijski faktor. V skalarni aproksimaciji lahko torej vpeljemo intenziteto kot  $\mathcal{I} = |u|^2$ , s čimer tudi privzamemo zvezo med amplitudo skalarnega polja in amplitudo električnega polja  $u = \sqrt{\frac{n_i}{2}} |\mathcal{E}|$ . Intenziteto skalarnega polja zato definiramo kot

$$\tilde{\mathcal{I}}(\mathbf{x}) = |\tilde{u}(\mathbf{x})|^2 = \tilde{u}(\mathbf{x})^* \circ \tilde{u}(\mathbf{x}). \quad (15)$$

Če želimo polju  $u$  in intenziteti  $\mathcal{I}$  pripisati enote, pa množimo polje  $z E_0$ , intenziteto pa  $z I_0$ .

Preslikajmo sedaj kolimiran Gaussov snop svetlobe, katerega grlo postavimo v gorišče leče. Da bo primer bolj zanimiv, privzemimo, da za preslikavo uporabimo imerzijski objektiv, ki preslika svetlobo iz zraka v snov z lomnim količnikom  $n_i = 1,5$ . Imerzijski objektivni so primerni za preslikave pri velikih numeričnih aperturah. Z njimi lahko stisnemo snop svetlobe do najmanjše možne velikosti, ki je omejena z uklonsko limito. Goriščna razdalja objektiva naj bo  $f = 4 \text{ mm}$  in  $\text{NA} = 1,4$ , kar ustreza mikroskopski povečavi  $M = f_t/f = 50$ , če tak objektiv uporabimo v mikroskopu, prilagojenem na neskončnost. Mikroskop namreč sestoji iz objektiva in leče z goriščno razdaljo  $f_t = 200 \text{ mm}$ , ki skupaj tvorita optični sistem.

Najprej si moramo izbrati željeno velikost slikovne točke  $p$  v ravnini  $S$  in velikost matrike  $N \times N$ . Ker želimo izračunati polje stisnjenih snopov, moramo za velikost slikovne točke izbrati vrednosti, ki so manjše od valovne dolžine svetlobe. Izberimo  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $p = 40 \text{ nm}$  in  $N = 200$ . Pri tej izbiri je slika velikosti  $L = 8 \mu\text{m}$ . Ta izbira velikosti slike v kombinaciji z lečo definira velikost slike v recipročnem prostoru  $L' = p'N = 50 \text{ mm}$  in premer odprtine na vstopni strani objektiva  $d = 2f\text{NA} = 11 \text{ mm}$ .

Najprej ustvarimo polje na vstopni strani. Da bo primer bolj zanimiv, zapišimo Gaussov snop, ki osvetljuje lečo zunaj osi preslikave:

$$u'(\mathbf{x}') = e^{-(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0)^2/w_0^2}, \quad (16)$$

pri čemer izberemo  $\mathbf{x}'_0 = (-4, 0) \text{ mm}$  in  $w'_0 = 1 \text{ mm}$ . Gre torej za preslikavo, pri kateri, glede na geometrijsko interpretacijo preslikave, dobimo polje, ki se v ravnini  $S$  širi pod kotom  $\theta = \arcsin \frac{x_0}{nf} \approx 42^\circ$ . V numerični implementaciji zapišemo matriko  $u'_{m,n}$ , pri čemer moramo upoštevati, da

podatke v matrikah zapišemo po kvadrantih. To je posledica uporabe diskretne Fourierove transformacije, kjer so v recipročnem prostoru zastopane tako pozitivne kot tudi negativne frekvence. Zato je v prvem kvadrantu polje  $u'$  pri koordinatah  $x' \geq 0$  in  $y' \geq 0$ , v drugem kvadrantu je polje  $u'$  pri koordinatah  $x' < 0$  in  $y' \geq 0$ , v tretjem kvadrantu imamo  $x' \geq 0$  in  $y' < 0$  in v četrtem kvadrantu  $x' < 0$  in  $y' < 0$ . Za vizualizacijo matrike je primerno prestaviti koordinatno izhodišče matrike  $u'_{0,0}$  v center slike, kar v programskem okolju python naredimo s funkcijo 'fftshift'. Na sliki 2a so prikazani polje in oblika zaslonke pred lečo v matričnem zapisu  $(m, n)$  in ustrezna vizualizacija v koordinatnem sistemu  $S'$  s koordinatami  $\mathbf{x}' = (x, y)$ .

Polje najprej transformiramo s preslikavo leče in upoštevamo obliko zaslonke pred lečo. Na sliki 2b je prikazan realni del polja  $i\tilde{u}(\mathbf{x})$  in intenziteta svetlobe v gorišču leče, ki ju izračunamo s preslikavo

$$i\tilde{u}(\mathbf{x}) = i\mathcal{L}_f \tilde{A} \circ \tilde{u}'(\mathbf{x}') = \frac{p'}{p} \mathcal{F} \tilde{A} \circ \tilde{u}'(\mathbf{x}'), \quad (17)$$

pri čemer množenje z  $i$  uporabimo zaradi lažje primerjave relativnih faz med poljema na obeh straneh preslikave. Polje  $i\tilde{u}(\mathbf{x})$  je zopet Gaussova funkcija, kar je lastnost Fourierove transformacije na Gaussovi funkciji. Primerjamo lahko tudi velikost grla in amplitudo polja z rezultatom, ki ga dobimo z uporabo znanih enačb za preslikave Gaussovih snopov (v okviru paraksialne aproksimacije). Pozicija grla  $z_2$  je podana z enačbo

$$z_2 = \frac{z_1 f^2}{z_1^2 + z_0^2} \quad (18)$$

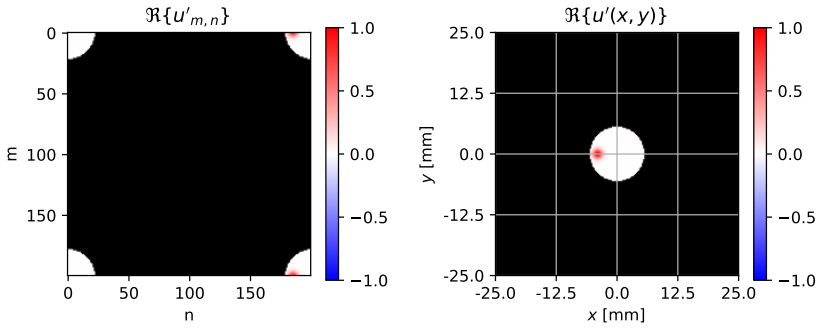
pri čemer je  $z_0 = kw_0'^2/2$  dolžina grla na vstopni strani in  $z_1$  pozicija grla na vstopni strani. Širina grla na izstopni strani leče je podana z

$$w_0 = w_0' \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} \quad (19)$$

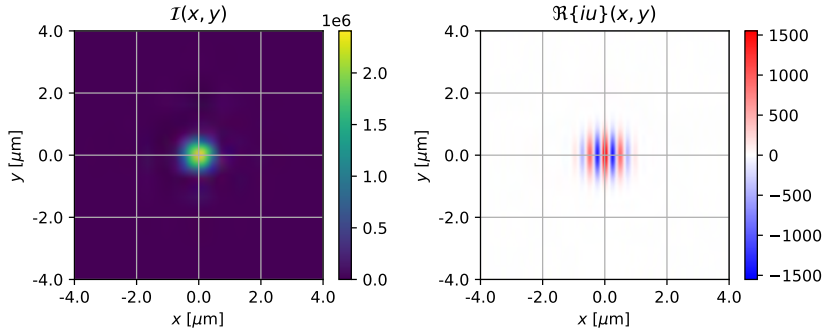
V našem primeru je grlo postavljeno v gorišče leče na vstopni strani, zato je  $z_1 = 0$  in dobimo  $w_0 = w_0' \frac{f}{z_0} = \frac{f\lambda}{\pi w_0'} = \frac{2}{\pi} \mu\text{m}$ . Amplituda polja v grlu je tako za faktor  $w_0'/w_0 = \frac{\pi}{2} 10^3$  večja kot v izhodišču, kjer smo izbrali polje z intenziteto  $\mathcal{I} = 1$  v centru grla, in je v skladu z izračunanim poljem prikazano na sliki 2. Za izračun polja zunaj goriščne ravnine uporabimo operator širjenja polja. Najprej izračunamo matriko  $\hat{\alpha}$ , katere elementi so

$$\alpha_{k,l} = \sqrt{n_i^2 - \frac{\lambda^2}{L^2}(k^2 + l^2)} \quad (20)$$

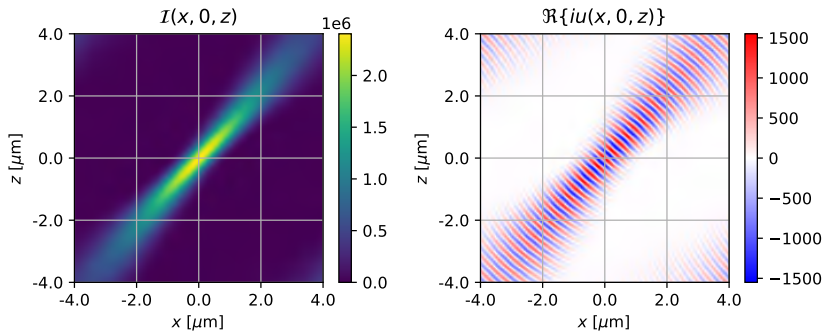
## Fokusiran Gaussov snop



(a) Levo: prikaz vrednosti elementov matrike  $\tilde{u}_{m,n}$ . Desno: prikaz polja v sistemu  $(x', y')$ . S črno je označeno območje zaslonke objektiva ( $\beta > \text{NA}$ ).



(b) Levo: intenziteta svetlobe v gorišču leče. Desno: Realni del amplitude polja v gorišču.



(c) Levo: prečni profil intenzitete. Desno: prečni profil realnega dela amplitude polja pri  $y = 0$ .

**Slika 2.** Preslikava Gaussovega snopa ( $w'_0 = 1 \text{ mm}$ ) z lečo ( $f = 4 \text{ mm}$ ). Center snopa je postavljen 4 mm iz osi leče. V gorišču se snop širi pod kotom  $42^\circ$  v mediju z lomnim količnikom  $n_i = 1,5$ .

kjer indeksa matrike  $k$  in  $l$  tečeta od  $-N/2$  do  $N/2 - 1$ , če je  $N$  sodo število. Nato izračunamo fazno matriko  $\hat{\Phi}_z$ , katere elementi so:

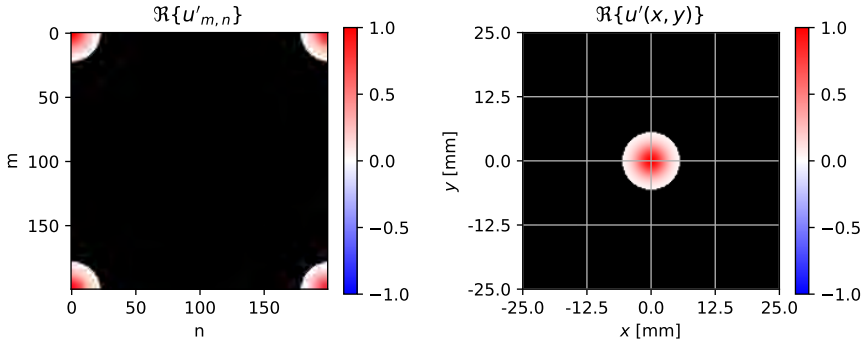
$$\Phi_{k,l} = e^{ik_0z\alpha_{k,l}}. \quad (21)$$

Pri izračunu matrike je pomembno, da upoštevamo dejstvo, da niso vse komponente polja v recipročnem prostoru propagirajoči ravni valovi. Matrika  $\hat{\alpha}$  je namreč realna samo za ravne valove, pri katerih velja  $\beta < n_i$ . V nasprotnem primeru je konstanta širjenja  $\alpha$  kompleksna, s tem pa namesto ravnih valov dobimo eksponentno pojemajoča evanescenčna polja. Čeprav smo ustrezno filtriranje že opravili z zaslonko pred lečo, ki jo opiše matrika  $\tilde{A}$ , je treba za izboljšanje numerične stabilnosti tako filtriranje opraviti tudi v recipročnem prostoru komponent Fouriereve transformiranke  $\hat{u}$ . To najlažje opravimo s tem, da postavimo komponente fazne matrike  $\Phi_{k,l} = 0$  povsod, kjer je  $\alpha_{k,l}$  kompleksen. Prečni profil polja prikazuje slika 2c, kjer vidimo pričakovano širjenje Gaussovega snopa.

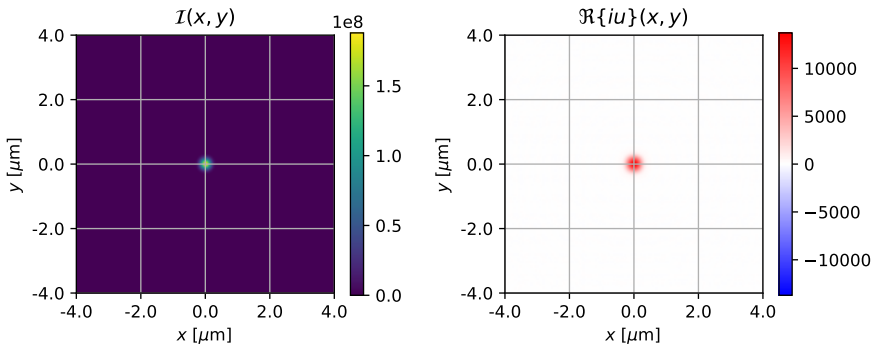
Numerični model, ki smo ga uporabili, ima v primerjavi z analitičnim modelom določene pomanjkljivosti. Zavedati se moramo, da lahko z numeričnim pristopom širjenje svetlobe opisujemo zgolj v okolici gorišč, torej v bližnjem polju. S tem, ko smo prešli na diskreten opis, smo namreč ustvarili periodične robne pogoje. Pri velikih oddaljenostih od grla lahko pride do interference s poljem iz sosednjih celic, ki so med seboj zamaknjene ravno za  $L = 8 \mu\text{m}$ . To je vidno v vogalih slike 2c, kjer zaradi periodičnih robnih pogojev pri koordinati  $(x, z) = (-4, 4) \mu\text{m}$  vidimo prispevek polja, ki se nahaja na desnem robu pri  $(x, z) = (4, 4) \mu\text{m}$ .

Primer fokusiranja svetlobe, ki smo si ga izbrali na sliki 2, je še zmeraj znotraj omejitev skalarne aproksimacije. Poskusimo sedaj polje zbrati v še manjše območje. To dosežemo tako, da osvetlimo celotno odprtino leče s svetlobo. Gaussov snop na vstopni strani postavimo v izhodišče in ga razširimo na velikost  $w'_0 = 3 \text{ mm}$ . Pri teh pogojih majhen delež svetlobe že osvetljuje robove zaslonke, zato tukaj v rezultatih že pričakujemo vpliv uklona na odprtini. Poleg tega v tem primeru tudi vstopamo v režim, kjer postane uporaba skalarne teorije vprašljiva. Rezultati preslikave so prikazani na sliki 3. Komentiramo jih nekoliko kasneje, v kontekstu vektorske obravnave polja. V naslednjem poglavju si zato pogledamo, kako rezultate skalarne teorije "popravimo", da dobimo vektorski opis.

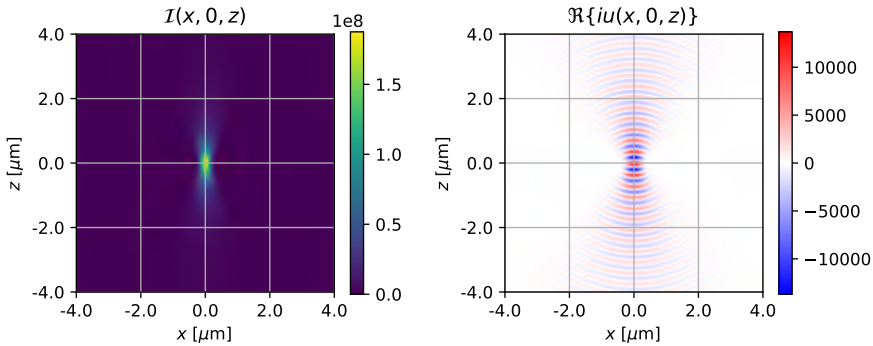
## Fokusiran Gaussov snop



(a) Levo: prikaz vrednosti elementov matrice  $\tilde{u}_{m,n}$ . Desno: prikaz polja v sistemu  $(x', y')$ . S črno je označeno območje zaslonke objektiva ( $\beta > \text{NA}$ ).



(b) Levo: intenziteta svetlobe v gorišču leče. Desno: Realni del amplitude polja v gorišču.



(c) Levo: prečni profil intenzitete. Desno: prečni profil realnega dela amplitude polja pri  $y = 0$ .

**Slika 3.** Preslikava Gaussovega snopa ( $w'_0 = 3 \text{ mm}$ ) z lečo ( $f = 4 \text{ mm}$ ). Center snopa je postavljen v osi leče, kar ustvari močno fokusiran snop svetlobe v gorišču leče.

#### 4. Vektorski opis

Pri prehodu iz skalarnega opisa na vektorski opis najprej definirajmo vektor polja, ki opiše tako električne kot magnetne komponente polja. Na prvi pogled se zdi, da mora biti vektor oblike  $(E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)^T$ , vendar niso vse komponente tega vektorja med seboj neodvisne. Iz  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  in  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  sledi, da ima ravni val dve možni lastni polarizaciji, obenem pa ima pri danem vektorju širjenja  $\beta$  valovni vektor dve možni projekciji na os  $z$ , torej polje, ki se širi v smeri osi  $z$ , in polje, ki se širi v nasprotni smeri. Možna so torej štiri lastna stanja širjenja, kar pa mora opisati vektor s štirimi komponentami. Širjenje svetlobe v poljubnem homogenem mediju lahko opišemo z Berremanovim matričnim formalizmom [1], kjer za vektorsko obravnavo širjenja svetlobe izberemo  $x$  in  $y$  komponenti električnega in magnetnega polja in vpeljemo t. i. Berremanov vektor  $\psi = (E_x, H_y, E_y, -H_x)^T$ . V tem delu bomo zaradi enostavnejše numerične implementacije vpeljali naslednji vektor  $\mathbf{m} = (\mathcal{E}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{E}_y, \mathcal{H}_x)^T$ , kjer smo vpeljali brezdimenzijske komponente  $\mathcal{E}_x = E_x/E_0$ ,  $\mathcal{E}_y = E_y/E_0$ ,  $\mathcal{H}_x = Z_0 H_x/E_0$ ,  $\mathcal{H}_y = Z_0 H_y/E_0$ .

Najprej definirajmo intenziteto svetlobe, ki je povezana s Poyntingovim vektorjem  $\mathbf{S}$ . V naši brezdimenzijski notaciji vpeljimo torej Poyntingov vektor kot  $\mathcal{S} = \frac{1}{2} \mathcal{E} \times \mathcal{H}^*$ , pri čemer velja  $\mathbf{S} = I_0 \mathcal{S}$ . Poyntingov vektor definira smer in jakost energijskega toka. Intenziteto svetlobe sedaj definirajmo v kontekstu meritve, kjer z ustrezno kamero izmerimo intenziteto v izbrani ravnini. Ker je normala ravnine v smeri osi  $z$ , je izmerjena intenziteta torej kar  $z$ -komponenta Poyntingovega vektorja:

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \Re \mathcal{S}_z(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} |\Re (\mathcal{E}_x(\mathbf{x}) \circ \mathcal{H}_y^*(\mathbf{x}) - \mathcal{E}_y(\mathbf{x}) \circ \mathcal{H}_x^*(\mathbf{x}))|, \quad (22)$$

pri čemer vzamemo absolutno vrednost, saj lahko tok teče tudi v nasprotno smer. Vidimo, da za izračun intenzitete ne potrebujemo  $z$ -komponent električnega in magnetnega polja, s čimer upravičimo izbiro komponent vektorja  $\mathbf{m}$ . Princip superpozicije pri prehodu na vektorski opis ohrani, zato lahko zapišemo

$$\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x}, z) = \sum_{\beta, \nu} a_{\beta, \nu}^{\pm} \mathbf{m}_{\beta, \nu}^{\pm} e^{ik_0 \beta \cdot \mathbf{x} - ik_0 \alpha_{\beta, \nu}^{\pm} z}, \quad (23)$$

pri čemer  $z, \nu = 1, 2$  označimo obe lastni polarizaciji,  $+$ ,  $-$  pa označujeta dve možni smeri širjenja. Tako kot pri obravnavi skalarnega polja, v primeru  $z = 0$  dobimo inverzno Fourierovo transformacijo vektorskega polja

$$\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x}, z) = \sum_{\beta, \nu} a_{\beta, \nu}^{\pm} \mathbf{m}_{\beta, \nu}^{\pm} e^{ik_0 \beta \cdot \mathbf{x}} = \sum_{\beta} \mathbf{m}_{\beta} e^{ik_0 \beta \cdot \mathbf{x}}, \quad (24)$$

pri čemer vsoto po lastnih stanjih lahko zapišemo s  $4 \times 4$  matričnim formalizmom. Vektor  $\mathbf{m}_\beta$  dobimo z množenjem amplitudnega vektorja  $\mathbf{a}_\beta$  z ustrezno  $4 \times 4$  matriko polja:

$$\mathbf{m}_\beta = \mathbf{F}_\beta \mathbf{a}_\beta, \quad (25)$$

pri čemer smo vpeljali matriko  $\mathbf{F}_\beta = [\mathbf{m}_{\beta,1}^+, \mathbf{m}_{\beta,1}^-, \mathbf{m}_{\beta,2}^+, \mathbf{m}_{\beta,2}^-]$ , ki ima v stolpcih zapisane komponente lastnih vektorjev polja  $\mathbf{m}_{\beta,\nu}^\pm = (\mathcal{E}_{x,\nu}^\pm, \mathcal{H}_{y,\nu}^\pm, \mathcal{E}_{y,\nu}^\pm, \mathcal{H}_{x,\nu}^\pm)^T$ . Amplitudni vektor  $\mathbf{a}_\beta$ , katerega kvadrat predstavlja intenzitete lastnih stanj, vpeljemo kot  $\mathbf{a}_\beta = (a_{\beta,1}^+, a_{\beta,1}^-, a_{\beta,2}^+, a_{\beta,2}^-)^T$ . Pri izpeljavi matrike  $\mathbf{F}$  vzemimo najprej primer ravnega vala, ki se širi v ravnini  $xz$ . Za pomoč nam je lahko slika 1, kjer je s sivo barvo označen ravni val v območju gorišča leče. Temu valu lahko pripišemo bodisi polarizacijo  $p$  (označeno na sliki 1) ali pa polarizacijo  $s$ . V območju odprtine pred lečo sta to ravno polarizaciji  $x$  in  $y$ . Tema dvema polarizacijama pripišimo vektor  $\mathbf{m}_{\beta,p}^+$  in  $\mathbf{m}_{\beta,s}^+$ , ki ju zapišemo v prvi in tretji stolpec matrike  $\mathbf{F}$ . Vektorja  $\mathbf{m}_{\beta,p}^-$  in  $\mathbf{m}_{\beta,s}^-$  določimo na podoben način in ju zapišemo v drugi in četrti stolpec ter dobimo

$$\mathbf{F}'_\beta = \mathbf{F}'_{k,l} = \sqrt{\frac{2}{\alpha_{k,l}}} \begin{bmatrix} \alpha_{k,l}/n & \alpha_{k,l}/n & 0 & 0 \\ n & -n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha_{k,l} & \alpha_{k,l} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

pri čemer so  $\alpha_{k,l}$  podani v enačbi 20. Vektorje  $\mathbf{m}_\beta$  smo normirali tako, da je  $\mathcal{S}_z = 1$ , na ta način zagotovimo ohranitev intenzitete pri prehodu iz amplitudnega vektorja  $\mathbf{a}_\beta$  v elektromagnetni vektor  $\mathbf{m}_\beta$ . Splošno rešitev, za širjenje v poljubni smeri, dobimo iz matrike  $\mathbf{F}'$  tako, da zavrtimo vektorje za ustrezen kot  $\phi$ . Torej je matrika  $\mathbf{F}_\beta = \mathbf{R}'_\beta \mathbf{F}'_\beta$  in je

$$\mathbf{R}'_\beta = \mathbf{R}'_{k,l} = \begin{bmatrix} \cos \phi_{k,l} & 0 & -\sin \phi_{k,l} & 0 \\ 0 & \cos \phi_{k,l} & 0 & \sin \phi_{k,l} \\ \sin \phi_{k,l} & 0 & \cos \phi_{k,l} & 0 \\ 0 & -\sin \phi_{k,l} & 0 & \cos \phi_{k,l} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

pri čemer kot zasuka dobimo iz zveze  $\phi_{k,l} = \arctg(k/l)$ . Matrični formalizem nam omogoča, da zapišemo operator širjenja vektorskega polja kot:

$$\widetilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x}, z) = \mathcal{M}_z \widetilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x}, 0) = \mathcal{F}^{-1} \widehat{\mathbf{M}}_z \circ \mathcal{F} \widetilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x}, 0), \quad (28)$$

pri čemer vpeljemo prenosno matriko

$$\widehat{\mathbf{M}}_z = \widehat{\mathbf{F}} \circ \widehat{\Phi}_z \circ \widehat{\mathbf{F}}^{-1}, \quad (29)$$

kjer  $N \times N$  matrika  $\hat{\mathbf{F}}$  sestoji iz  $4 \times 4$  matrik  $\mathbf{F}_\beta$  in je  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$   $N \times N$  matrika diagonalnih matrik  $\boldsymbol{\alpha}_\beta = \text{diag}(+\alpha, -\alpha, +\alpha, -\alpha)$  in je  $\alpha = \sqrt{n_i^2 - \beta^2}$  konstanta širjenja svetlobe. Vidimo, da je oblika operatorja  $\mathcal{M}_z$  za translacijo vektorskega polja  $\mathbf{m}$  enaka obliki operatorja  $\oplus_z$  za translacijo skalarnega polja. S Fourierovo transformacijo dobimo amplitude ravnih valov  $\mathbf{m}_\beta$ , ki pa jih moramo, za razliko od skalarnega polja, najprej razstaviti po lastnih stanjih  $\mathbf{a}_\beta = \mathbf{F}_\beta^{-1} \mathbf{m}_\beta$ , nato pa amplitudni vektor  $\mathbf{a}_\beta$  množiti z ustrezno fazno matriko in rekonstruirati celotno polje z  $\mathbf{m}_\beta = \mathbf{F}_\beta \mathbf{a}_\beta$ . Za razliko od skalarnega opisa, kjer vsakemu ravnemu valu  $\beta$  pripišemo skalarno amplitudo  $a_\beta$ , moramo pri vektorski obravnavi zapisati amplitudne vektorje  $\mathbf{a}_\beta = (a_{\beta,1}^+, a_{\beta,1}^-, a_{\beta,2}^+, a_{\beta,2}^-)^T$ , ki nosijo informacijo o amplitudi, polarizaciji in smeri širjenja posameznih ravnih valov.

Potrebujemo še operator za preslikavo polja z lečo. Problem preslikave leče pri velikih numeričnih aperturah reši t. i. Deby-Wolfov integral [6]. Namesto numerične implementacije Deby-Wolfovega integrala, za katerim stoji fizikalni opis leče, lahko uporabimo nekoliko drugačen pristop, ki temelji na matematičnem opisu idealne leče. Pristop je razložen v [5], tukaj povzemimo ključne korake. Najprej ugotovimo, da skalarno polje  $\tilde{u}$  in vektorsko polje  $\tilde{\mathbf{m}}$  lahko povežemo, če vpeljemo generalizirani Jonesov vektor:

$$\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = (\tilde{u}_x^+(\mathbf{x}), \tilde{u}_x^-(\mathbf{x}), \tilde{u}_y^+(\mathbf{x}), \tilde{u}_y^-(\mathbf{x}))^T, \quad (30)$$

pri čemer so  $u_{x,y}^\pm$  neodvisna skalarna polja. S Fourierovo transformacijo  $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$  dobimo amplitudne vektorje ravnih valov  $\mathbf{j}_\beta$  zapisane v laboratorijskem koordinatnem sistemu  $S(x, y)$ . Amplitudni vektor  $\mathbf{a}_\beta$  smo zapisali v lastnem sistemu polarizacij  $S(p, s)$ , ki je glede na laboratorijski sistem zavrtin za kot  $\phi$ . Prehod iz enega koordinatnega sistema v drugega tako dobimo z rotacijo koordinatnega sistema, zato velja  $\mathbf{j}_\beta = \mathbf{R}_\beta \mathbf{a}_\beta$ . Jonesov vektor  $\mathbf{j}$  lahko zato povežemo z vektorjem  $\mathbf{m}$ :

$$\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}_m \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1} \hat{\mathbf{B}}_m \circ \mathcal{F} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}), \quad (31)$$

pri čemer je

$$\hat{\mathbf{B}}_m = \hat{\mathbf{F}} \circ \hat{\mathbf{R}}^T = \hat{\mathbf{R}}' \circ \hat{\mathbf{F}}' \circ \hat{\mathbf{R}}^T, \quad (32)$$

pri čemer je  $\hat{\mathbf{R}}$  rotacijska matrika, ki poskrbi za ustrezno vrtenje komponent Jonesovega vektorja iz laboratorijskega koordinatnega sistema v lastni sistem. Podobno, kot smo vpeljali  $\mathbf{R}'_\beta$  za rotacijo vektorja  $\mathbf{m}$  v enačbi 27,



komponente matrike  $\widehat{\mathbf{R}}$  za rotacijo vektorja  $\mathbf{j}$  zapišemo kot:

$$\mathbf{R}_\beta = \mathbf{R}_{k,l} = \begin{bmatrix} \cos \phi_{k,l} & 0 & -\sin \phi_{k,l} & 0 \\ 0 & \cos \phi_{k,l} & 0 & -\sin \phi_{k,l} \\ \sin \phi_{k,l} & 0 & \cos \phi_{k,l} & 0 \\ 0 & \sin \phi_{k,l} & 0 & \cos \phi_{k,l} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Polje  $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}_m^{-1} \tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$  je torej reprezentacija pravega vektorskega polja  $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$ . V Jonesovem matričnem formalizmu [3] vektor  $\mathbf{j} = (j_x, j_y)$  predstavlja polarizacijo in amplitudo električnega polja ravnega vala, ki se širi v smeri osi  $z$ . S tem ko skalarnemu polju  $\tilde{u}$  pripišemo Jonesov vektor, v resnici privzamemo, da je obravnavano polje dobro kolimirani snop svetlobe, pri čemer vse komponente ravnih valov dobro opiše en sam valovni vektor, ki definira smer širjenja.  $\tilde{\mathbf{j}}$  je torej paraksialno polje, ki se širi v referenčnem koordinatnem sistemu, pri katerem so vsi valovni vektorji  $\mathbf{k}_\beta$  usmerjeni v smeri osi  $z$ . Na splošno torej vektor  $\tilde{\mathbf{j}}$  ne vsebuje komponent pravega električnega polja. Komponente električnih in magnetnih polj dobimo iz  $\tilde{\mathbf{j}}$  preko enačbe 31. Zapis z Jonesovim vektorjem pride do izraza, ko opazujemo svetlobo z mikroskopom oziroma, ko imamo opraviti s paraksialnimi snopi svetlobe. Če poljuben vektorski snop svetlobe opazujemo z mikroskopom, v ravnini slike dobimo vektorsko polje  $\tilde{\mathbf{m}}$ , ki je sestavljeno iz skoraj paralelnih ravnih valov. V tem primeru vektor  $\tilde{\mathbf{j}}$  pravilno opiše električne komponente elektromagnetnega polja. Vektor  $\tilde{\mathbf{j}}$  poljubnega fokusiranega snopa svetlobe torej lahko razumemo kot električno polje snopa, ki ga otipamo z mikroskopom pri velikih povečavah. Opis z vektorjem  $\tilde{\mathbf{j}}$  je uporaben tudi pri preslikavah. Snop svetlobe v ravnini  $S'$  na sliki 1 pred lečo je dobro kolimiran, zato je  $\tilde{\mathbf{j}}$  primeren za opis električnega polja svetlobe v ravnini  $S'$  pred lečo.

Oglejmo si nekaj lastnosti Jonesove reprezentacije vektorskega polja. V tem delu nas zanima zgolj širjenje svetlobe v smeri naprej, zato vpeljemo vektorsko polje  $\tilde{\mathbf{j}}^+(\mathbf{x}) = (\tilde{j}_x^+(\mathbf{x}), 0, \tilde{j}_y^+(\mathbf{x}), 0)^T$ . Delujmo z operatorjem  $\mathcal{B}_m^{-1}$  na enačbo 28 in upoštevajmo enačbo 31, dobimo:

$$\tilde{\mathbf{j}}^+(\mathbf{x}, z) = \mathcal{B}_m^{-1} \mathcal{M}_z \mathcal{B}_m \tilde{\mathbf{j}}^+(\mathbf{x}, 0) = \mathcal{F}^{-1} \widehat{\Phi}_z \mathcal{F} \tilde{\mathbf{j}}^+(\mathbf{x}, 0) = \oplus_z \tilde{\mathbf{j}}^+(\mathbf{x}, 0). \quad (34)$$

Jonesova reprezentacija vektorskega polja se torej pri širjenju obnaša kot skalarno polje. Izkaže se [5], da iz zahteve po idealni transformaciji leče, kot je prikazano na sliki 1, sledi, da je Jonesova reprezentacija vektorskega polja v gorišču leče ravno Fourierova transformacija Jonesove reprezentacije polja na vstopni zaslonki pred lečo, torej je:

$$\tilde{\mathbf{j}}^+(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_f \tilde{\mathbf{j}}'^+(\mathbf{x}'). \quad (35)$$

Vidimo, da lahko pri vektorski obravnavi transformacije snopov z lečami uporabimo rezultate skalarne teorije, če pred preslikavo in po njej opravimo ustrezno preslikavo iz vektorskega na skalarno polje in obratno. Postopek za izračun vektorskega polja v gorišču leče je identičen preslikavi s skalarnim poljem, samo da skalarnemu polju pripišemo Jonesov vektor. Ko izračunamo končno Jonesovo vektorsko polje v gorišču leče, uporabimo enačbo 31 za izračun komponent električnega in magnetnega polja. Vektorsko polje v okolici gorišča leče je:

$$\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}_m \oplus_z \mathcal{L}_f \hat{A} \circ \tilde{\mathbf{j}}'^+(\mathbf{x}'). \quad (36)$$

Izračunajmo sedaj električno polje v gorišču leče iz primera, ki ga prikazuje slika 3a, kjer smo najprej izračunali skalarno polje  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  prikazano na sliki 3b, kot razloženo v prejšnjem poglavju. Sedaj vstopnemu in izstopnemu skalarnemu polju pripišemo ustrezen Jonesov vektor. Vzemimo, da pred lečo skalarno polje opisuje svetlobo, ki se širi v smeri osi  $z$  in je polarizirano v smeri  $x$ . Za takšna polja se je uveljavil termin *skalarni snop svetlobe*, saj je polarizacija polja konstantna in se ne spreminja z oddaljenostjo od centra snopa  $\mathbf{x}$ , za razliko od *vektorskih snopov svetlobe*, kjer je polarizacija polja funkcija oddaljenosti od centra snopa. Vpeljemo torej  $\tilde{\mathbf{j}}'(\mathbf{x}') = (\tilde{u}'(\mathbf{x}'), 0, 0, 0)^T$ , ki opisuje skalarni snop svetlobe polariziran v smeri  $x$ . V skladu s principom transformacije Jonesove reprezentacije polja (enačba 35) dobimo v ravnini slike  $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, z) = (\tilde{u}(\mathbf{x}, z), 0, 0, 0)^T$ . Izračun elektromagnetnega polja  $\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{x}, z) = \mathcal{B}_m \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, z)$  dobimo z uporabo transformacije  $\mathcal{B}_m$ , iz česar dobimo električni komponenti polja  $\mathcal{E}_x$  in  $\mathcal{E}_y$ , in magnetni komponenti polja  $\mathcal{H}_x$  in  $\mathcal{H}_y$  (slika 4). Potrebujemo še  $z$ -komponente polj  $\mathcal{E}$  in  $\mathcal{H}$ . Manjkajoči komponenti polj zapišimo v vektor  $\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = (\tilde{\mathcal{H}}_z(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{E}}_z(\mathbf{x}))^T$ , ki ga lahko izračunamo iz vektorja  $\tilde{\mathbf{m}}$ , kot je to razloženo v [5], lahko pa ga dobimo neposredno iz Jonesove reprezentacije:

$$\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}_z \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1} \hat{\mathbf{B}}_z \circ \mathcal{F} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}), \quad (37)$$

pri čemer je

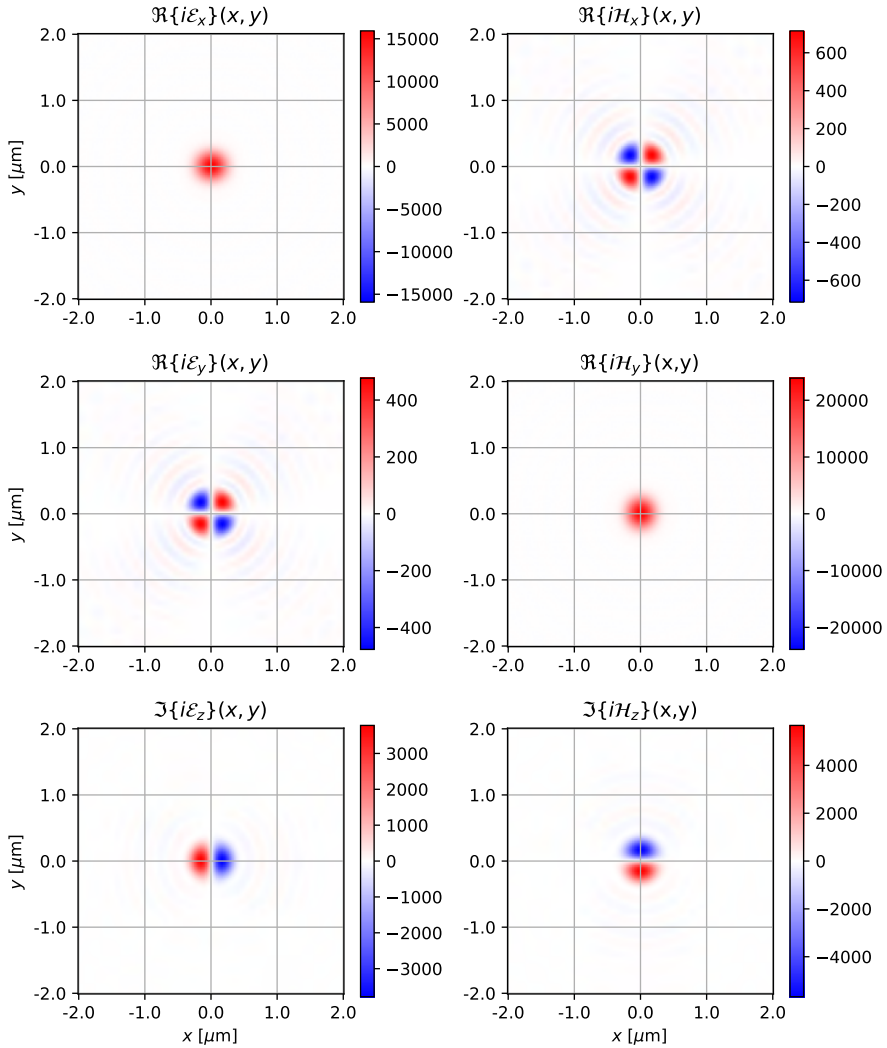
$$\hat{\mathbf{B}}_z = \hat{\mathbf{F}}'' \circ \hat{\mathbf{R}}^T. \quad (38)$$

Elementi matrike  $\hat{\mathbf{F}}''$  so matrike velikosti  $2 \times 4$

$$\mathbf{F}_{k,l}'' = \sqrt{\frac{2}{\alpha_{k,l}}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_{k,l} & \beta_{k,l} \\ -\beta_{k,l}/n & \beta_{k,l}/n & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

pri čemer je  $\beta_{k,l} = \frac{\lambda}{L} \sqrt{k^2 + l^2}$ . Princip preslikave iz Jonesove reprezentacije na vektorsko polje lahko tudi posplošimo, če vpeljemo celotni vektor elektromagnetnega polja kot  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = (\tilde{\mathcal{H}}_z(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{E}}_x(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{H}}_y(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{E}}_y(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{H}}_x(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{E}}_z(\mathbf{x}))^T$ ,

## Fokusiran Gaussov snop



**Slika 4.** Električne in magnetne komponente polja fokusiranega Gaussovega snopa izračunane iz skalarnega polja s slike 3, ki mu pripišemo polarizacijo  $x$  in generalizirani Jonesov vektor  $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = (\tilde{u}(\mathbf{x}), 0, 0, 0)^T$ . Ključna razlika med skalarno in vektorsko rešitvijo je v komponenti  $z$ , ki ima v primerjavi s komponento  $x$  fazo  $e^{\pm i\pi}$ . Posledično, snop v fokusu ni linearno polariziran, ampak eliptično.

ki mu pripišemo ustrezno transformacijo:

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}_f \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1} \hat{\mathbf{B}}_f \circ \mathcal{F} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}), \quad (40)$$

pri čemer prepuščamo bralcu, da izpelje matriko  $\hat{\mathbf{B}}_f$  iz matrik  $\hat{\mathbf{B}}_m$  in  $\hat{\mathbf{B}}_z$ .

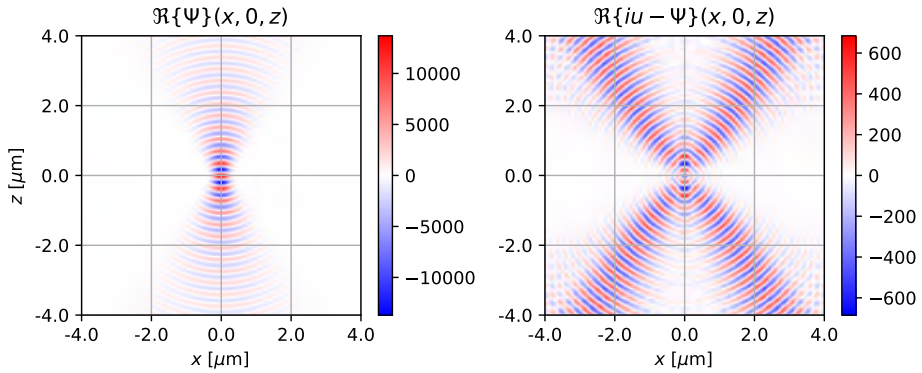
S slike 4 je razvidno, da v primeru močnega fokusiranja svetlobe v gorišču leče pridelamo znatno vrednost komponente  $z$  električnega in magnetnega polja. Poleg tega opazimo, da je relativno glede na komponento  $x$  polja, komponenta  $z$  fazno premaknjena za  $e^{\pm i\pi}$ , odvisno od koordinate  $\mathbf{x}$ . To pomeni, da v gorišču leče namesto skalarne snopa, ki je polariziran v smeri  $x$ , dobimo vektorski snop svetlobe z eliptično polarizacijo, kjer se sučnost polarizacije zamenja pri prehodu iz  $-\mathbf{x}$  v  $\mathbf{x}$ . Takšnega polja ne moremo dobiti v okviru skalarne teorije, ali s širjenjem Gaussovega snopa v okviru paraksialne aproksimacije. Za konec si oglejmo še prečni profil vektorskega polja  $\tilde{\mathbf{f}}$  in ga primerjajmo s skalarnim poljem  $\tilde{u}$  in z Gaussovimi snopom, ki ga v okviru paraksialne aproksimacije opisuje funkcija

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{w_0}{w} e^{-r^2/w^2} e^{ikz + ikr^2/2R - i\eta}, \quad (41)$$

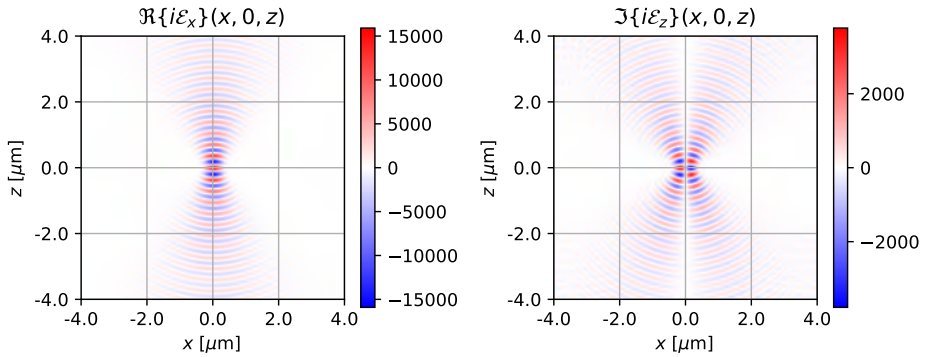
pri čemer so  $w = w_0 \sqrt{1 + z^2/z_0^2}$ ,  $R = z(1 + z_0^2/z^2)$ ,  $\eta = \arctg(z/z_0)$ ,  $z_0 = kw_0^2/2$ ,  $k = nk_0$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$  in določimo  $w_0$  iz širine snopa v ravnini zaslonke  $w'_0$ . V skladu z lastnostmi transformacije Gaussovih snopov z lečo dobimo  $w_0 = \frac{f\lambda}{\pi w'_0} = \frac{2}{3\pi} \mu\text{m}$ . Na sliki 5a skoraj ni opaziti razlik med  $\Psi$  in skalarnim poljem  $\tilde{u}$  s slike 3c, kar kaže na to, da je v tem primeru opis s paraksialnim poljem  $\Psi$  približno enako natančen kot opis s skalarnim poljem  $\tilde{u}$ . Odprtina zaslonke je glede na parametre vstopnega Gaussovega snopa še vedno dovolj široka, da občutnega uklona svetlobe zaradi končne razsežnosti leče ni opaziti. Pri natančni primerjavi sicer opazimo določena odstopanja med izračunanim poljem  $\tilde{u}$  in  $\Psi$  (slika 5a desno). Poleg prispevka zaradi uklona na odprtini leče, je izračun širjenja svetlobe z operatorjem  $\oplus_z$  natančnejši. Pri izpeljavi polja  $\Psi$  namreč rešujemo paraksialno valovno enačbo, ki je zgolj približek prave valovne enačbe. S tega vidika je torej izračun polja v okolici gorišča leče preko formalizma, predstavljenega v prejšnjem poglavju, bolj natančen od rešitve, ki jo podaja enačba 41.

V primerjavi s pravo, vektorsko rešitvijo, ki je prikazana na sliki 5b, zopet na prvi pogled ni opaziti velikih odstopanj med  $\tilde{u}$  in  $\tilde{\mathcal{E}}_x$  (razen faktorja normalizacije  $\sqrt{2/n_i}$ ), opazimo pa pomemben prispevek komponente  $\tilde{\mathcal{E}}_z$ , ki ga tako paraksialna aproksimacija  $\Psi$  kot tudi skalarna aproksimacija  $\tilde{u}$  ne moreta reproducirati.

## Fokusiran Gaussov snop



(a) Levo: realni del polja  $\Psi(x, 0, z)$  preslikanega Gaussovega snopa v okviru paraksialne aproksimacije v okolici gorišča leče pri  $y = 0$ . Desno: primerjava s skalarnim poljem  $i u(x, 0, z) - \Psi(x, 0, z)$ .



(b) Levo: realni del polja  $i\mathcal{E}_x(x, 0, z)$ . Desno: imaginarni del polja  $i\mathcal{E}_z(x, 0, z)$  v okolici gorišča leče pri  $y = 0$ .

**Slika 5.** Primerjava skalarnega polja  $u(x, 0, z)$ , Gaussovega snopa  $\Psi(x, 0, z)$  in  $x$  in  $z$  komponent električnega polja  $\mathcal{E}(x, 0, z)$  pri preslikavi Gaussovega snopa s slike 3a.

## 5. Zaključek

V tem prispevku smo izpeljali numerično metodo na podlagi diskretne Fourierove transformacije za izračun elektromagnetnega polja v okolici gorišča leče. Pokazali smo, da lahko za izračun vektorskega polja uporabimo skalarno teorijo in vpeljali Jonesovo (paraksialno) reprezentacijo pravega vektorskega polja. Pri transformacijah vektorskih polj lahko vektorskim stanjem pripišemo ustrezen Jonesov vektor in izračunamo širjenje in transformacije polja z uporabo principov Fourierove optike, ki bazira na skalarni aproksimaciji. Na koncu za izračun pravega vektorskega polja opravimo ustrezno vektorsko transformacijo skalarne polja z operatorjem  $\mathcal{B}$ . Tak računski pristop poenostavi postopek kreiranja vstopnih polj in tudi celotno preslikavo, saj komponente vektorja  $\tilde{\mathbf{m}}$  oziroma  $\tilde{\mathbf{f}}$  izračunamo šele na koncu z uporabo operatorja  $\mathcal{B}$ .

V prispevku smo si ogledali preslikavo osnovnega Gaussovega snopa in pokazali, da ima polje v gorišču leče zanimive polarizacijske lastnosti. Čeprav je na vstopni strani Gaussov snop linearno polariziran, dobimo v gorišču leče hitro spreminjajočo se polarizacijo, ki prehaja iz levosučne eliptične polarizacije v desnosučno eliptično polarizacijo. Še bolj zanimiva polja v gorišču lahko dobimo z uporabo Gaussovih snopov višjih redov ali s preslikavami vektorskih snopov svetlobe, pri čemer je polarizacija svetlobe v ravnini pred lečo funkcija prečnega krajevnega vektorja  $\mathbf{x}$ . Z uporabo matričnega formalizma, ki smo ga izpeljali, lahko bralec samostojno raziskuje, kako oblika polja na vstopni strani, v kombinaciji z lastnostmi leče, vplivajo na obliko polja v gorišču leče. V pomoč je lahko implementacija metode, napisana v programskem jeziku *python*, ki je javno dostopna na spletnih straneh GitHub [4] in vabi bralca, da preizkusi delovanje metode in da razišče vektorske lastnosti svetlobe v gorišču leče pri preslikavah z veliko numerično aperturo.

## LITERATURA

- [1] Dwight W. Berreman. Optics in stratified and anisotropic media:  $4 \times 4$ -matrix formulation. *Journal of the Optical Society of America*, 62(4):502, April 1972.
- [2] J.W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill physical and quantum electronics series. W. H. Freeman, 2005.
- [3] R. Clark Jones. A new calculus for the treatment of optical systems description and discussion of the calculus. *Journal of the Optical Society of America*, 31(7):488, July 1941.
- [4] Andrej Petelin. Focused beam, 2025. <https://doi.org/10.5281/zenodo.17292340>.
- [5] Andrej Petelin and Igor Muševič. Focused beam propagation in cholesteric liquid crystals. *Opt. Express*, 33(16):32955–32975, Aug 2025.
- [6] B. Richards and E. Wolf. Electromagnetic diffraction in optical systems, II. structure of the image field in an aplanatic system. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 253(1274):358–379, dec 1959.

# GREŠ STAVIT? - PREDSTAVITEV SINOVE RAZISKOVALNE NALOGE

UROŠ KUZMAN

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani in Fakulteta za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru

Math. Subj. Class. (2010):

Članek predstavlja osnovnošolsko raziskovalno nalogo iz matematike, ki jo je pod mentorstvom avtorja izdelal njegov sin. Osrednja tema naloge so športne stave, njen cilj pa je bil oblikovati preprosto metodo za določanje kvot na nogometnih tekmah angleške lige. Poleg vsebine naloge so v članku predstavljeni tudi avtorjevi pedagoški izzivi pri mentoriranju osnovnošolca oziroma lastnega otroka.

## WANNA BET? – PRESENTATION OF MY SON'S RESEARCH PROJECT

The paper presents a primary school research project in mathematics, conducted by the author's son under his supervision. The central focus of the project is sports betting, with the aim of developing a simple method for calculating betting odds for football matches in the English league. In addition to the project's content, the article also discusses the pedagogical challenges faced by the author in mentoring a primary school student and his own child.

'Najtežje je voditi svoje otroke!' S tem stavkom smo si na dušo pihali plininski vodniki, ki smo poleg osnovnošolskih izletov občasno v gore odpeljali tudi svoje družine ter o tem nato pojamrali kolegom. Vsak starš namreč ve, da je - ne glede na količino pedagoških izkušenj - delati z lastnimi otroki pač ... drugače. No, v preteklem šolskem letu sem gorski dodal še matematično izkušnjo, saj je moj sin Nace, ki je obiskoval sedmi razred osnovne šole, pod mojim in mentorstvom svojega razrednika pripravil raziskovalno nalogo. Kot gre razbrati iz uvoda, sem zaradi dela z najstnikom dobil kak dodaten siv las, vseeno pa sem imel kot pedagog prvič priložnost opazovati tako šolski kot domači del raziskovanja. Oboja, matematična in pedagoška spoznanja sem zato strnil v ta članek.

Tema sinove raziskovalne naloge so bile športne stave, kar je zaradi slabega slovesa te dejavnosti in potencialne zasvojljivosti dvignilo nekaj prahu med znanci. A naj pojasnim, da cilj ni bil razviti metodo, s katero bi 'premagal' stavne hiše, temveč obelodaniti, kakšno je ozadje stavnega sveta in na empirični bazi ugotoviti, ali se res bolj splača biti stavna hiša kot stavec. Poleg tega so kvote, ki tvorijo sestavni del te teme, odličen poligon za učenje verjetnosti in njej sorodnih matematičnih vsebin.

Izbira teme pa ima tudi globlje ozadje. Ob matematiki je sinova strast tudi nogomet. Ne le da ga trenira v lokalnem klubu, ampak že več let tudi zelo podrobno spremlja rezultate v različnih ligah in na velikih tekmovanjih. Nekoč sem ga tako zalotil, da si je na spletu ogledoval Googlove ocene verjetnosti za zmago, poraz in remi njegove najljubše ekipe. Vprašal sem ga: 'Kaj meniš, kako to izračunajo?' Vprašanje je dalo odgovor, odgovor je dal naslednje vprašanje. In tako se je začela debata, ki je sčasoma prerasla v raziskovalno nalogo.

### 1. Kaj je športna stava?

Športna stava je igra na srečo, v kateri sodelujeta stavec in stavna hiša. Njena ključna sestavina je kvota, ki jo za športni dogodek kot obrat njegove verjetnosti določi stavna hiša. Gre torej za vrednost, ki se nahaja na intervalu  $[1, \infty)$ , oziroma faktor, s katerim je ob pravilni napovedi pomnožen vložek stavca. Oboje strneta spodnji formuli.

$$\text{kvota} = \frac{1}{\text{verjetnost dogodka}} \quad \text{izplačilo} = \text{kvota} \times \text{vložek}$$

Na primer, če se na teniškem dvoboju merita enakovredna igralca, bo verjetnost zmage vsakega izmed njiju 50 % oz.  $\frac{1}{2}$ . Torej bo kvota za zmago pri obeh enaka 2, če pa je verjetnost zmage prvega štirikrat višja od verjetnosti zmage drugega, bo njegova kvota 1,25, kvota nasprotnika pa 5. Stavec, ki bi položil deset evrov na dogodek s kvoto 5, bi v primeru njegove uresničitve prejel petdesetaka oz. zaslužil štirideset evrov, sicer pa bi svoj vložek izgubil.

V popolnem matematičnem svetu s tem početjem ne bi zaslužil nihče. Racionalna razporeditev brez tveganja bi namreč narekovala višje stave na nižje kvote in sorazmerno nizke zneske na dogodke z visokimi kvotami, stavna hiša pa bi ravno toliko, kot bi zaslužila, tudi izgubila. A šport je poln čustev in naključij, zaradi česar je ta sistem nepredvidljiv.

Poleg tega v resničnem stavnem svetu obstajajo marže, s katerimi hiše povečujejo svoj dobiček. Natančneje, naj bodo  $k_1, k_2, \dots, k_m$  kvote za nabor disjunktnih razpletov tekme, ki skupaj tvorijo popoln dogodek, tj. na tekmi se bo zgodil natanko eden od teh razpletov. Glede na predstavljeno relacijo med kvoto in verjetnostjo bi morale veljati

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_m} = 1,$$



saj gre za verjetnost gotovega dogodka. V praksi pa to ne drži! Za konkretne  $k_j$ , ki jih ponudi stavna hiša, bo vedno veljalo

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_m} - 1 > 0,$$

tej razliki pa pravimo marža in jo navadno izrazimo v procentih. Če se na primer vrnemo k dvoboju dveh enakovrednih teniških igralcev, bi bila pravična kvota na zmago pozameznika enaka 2, kvota, ki jo ponudi stavna hiša, pa denimo 1,9. To pomeni, da marža po zgornji formuli znaša okoli 5,26 %. Način določitve marže in njene razporeditve med kvote popolnega dogodka je odvisen od metodologije hiše ter tudi od športne panoge in kvalitete tekmovanja. Velike spletne stavne hiše za dogodke v najmočnejših ligah (Liga prvakov, NBA, NHL) ponujajo kvote z okoli 3 % maržo. Kakorkoli že, v nalogi je bil ta poslovni zorni kot zanemarljiv, kvota je bila obravnavana dosledno kot obrat verjetnosti dogodka.

V nogometu so najbolj popularne stave tipa 1, 0, 2, v katerih je možno staviti na tri dogodke - zmago domačih (1), remi (0) ali zmago gostov (2).

NOGOMET · ANGLIJA · PREMIER		REDNI ▾		
		1	0	2
NED, 16.02	15:00			
Liverpool - Wolverhampton		1,22	6,40	10,25

**Slika 1.** Primer kvot s spletne strani E-stave. Vsota obratnih vrednosti ni enaka 1 zaradi marže.

Poleg enostavnih so tu tudi kombinacijske stave, v katerih stavec poveže več napovedi. Kvota take stave je enaka produktu kvot posameznih dogodkov, tj. če so  $k_1, k_2, \dots, k_m$  kvote različnih dogodkov, ki se lahko zgodijo hkrati, bo kvota kombinacijske stave nanje enaka produktu  $k = \prod_{j=1}^m k_j$ . Ker za vse faktorje velja  $k_j \geq 1$ , se kvota s kombinacijsko stavno poveča, kar pomeni, da lahko stavec z njo zasluži več, a je tudi verjetnost njene uresničitve manjša. Na primer, če stavimo na dogodka s kvotama 2 in 5, bo naša končna kvota 10. To ustreza dejstvu, da je za uresničenje prvega dogodka verjetnost 50 %, za uresničenje drugega dogodka pa 20 %. Verjetnost za uresničenje obeh dogodkov hkrati - če sta neodvisna - pa 10 %. Stavne hiše lahko v primeru dogodkov z izrazitim favoritom kombinacijske stave predpišejo kot obvezne. S tem preprečijo visoke vložke na nizke kvote, ki bi vodili do ogromnih dobičkov z malo tveganja.

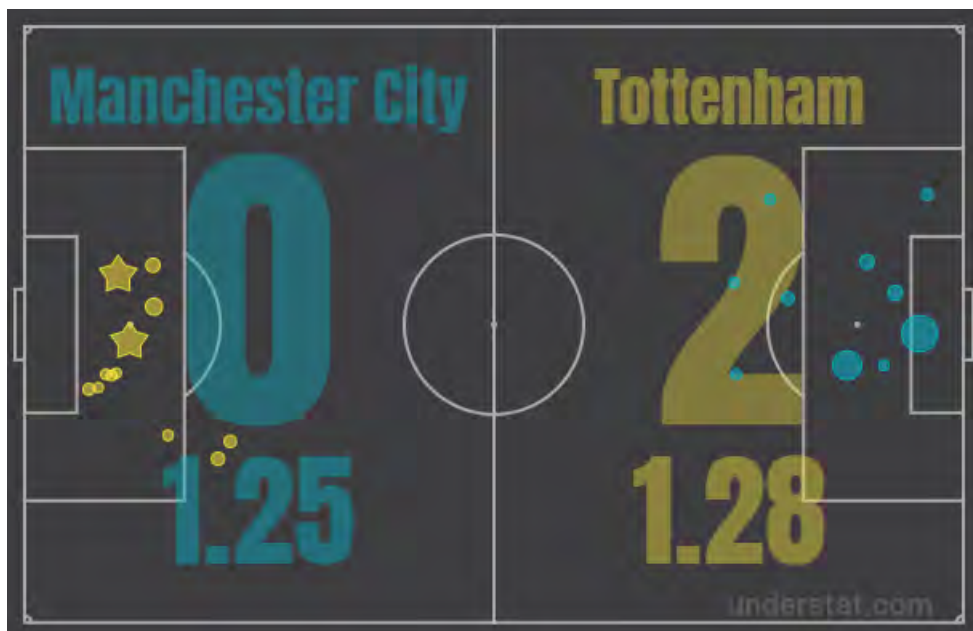
Sedaj pa k bistvu! Izračunati kvoto, kadar imamo podano verjetnost, je preprosto. A kako to verjetnost oceniti v nogometu, kjer ni jasne povezave s klasično definicijo? Katere statistične podatke uporabiti in na kakšen način? V nadaljevanju predstavljam preprosto metodologijo, razvito v okviru osnovnošolske naloge.

## 2. Faktor xG in normalna porazdelitev

Vrhunski nogomet se igra v okviru številnih tekmovanj. Naloga se je osredotočila na angleško premier ligo. Prvič, ker gre za najbolj popularno in spremljano državno prvenstvo, in drugič, ker ligaški sistem omogoča zelo dobro primerjavo podatkov. Tekme se igrajo vsak teden, vsak se pomeri z vsakim, vrednosti ekip so primerljive, ligaška lestvica sama pa dobro razkriva trend rezultatov moštev. Vse to je veliko bolj obvladljivo kot obravnava evropskih ali reprezentančnih tekem, kjer so dejavniki bolj razpršeni.

Najbolj očiten statistični kazalec v nogometu je število danih in prejetih golov. Vseeno pa vsakdo, ki si je kdaj ogledal nogometno tekmo, ve, da je lahko zavajajoč. Nogomet je namreč eden tistih športov, pri katerih nemalokrat zmaga ekipa, ki si tega glede na razmerje na zelenici ni povsem zaslužila. Zato obstajajo tudi alternativne metode za kvalitativno vrednotenje predstav moštev. Ena takih metod je t. i. *faktor xG* (expected goals).

Ideja te metode je oceniti verjetnost, s katero naj bi strel, ki je bil sprožen na tekmi, končal v голу. Na primer, v angleški prvi ligi je uspeh strelcev pri enajstmetrovki 74 % zato v primeru, da je ekipi dosojen ta kazenski strel, k njenemu faktorju xG za opazovano tekmo prištejemo vrednost 0,74. Pri vseh drugih priložnostih je ta ocena zahtevnejša, v principu pa poteka tako, da podjetja, ki se s tem ukvarjajo, zberejo veliko bazo podatkov - na primer, vse priložnosti na vseh tekmah lige v zadnjih petih sezonah - nato pa te priložnosti razdelijo v 'ekvivalenčne razrede' glede na podatke, kot so strelčeva razdalja do gola, kot in moč strela, pozicija vratarja in branilcev, specifična situacija (protinapad, prosti strel, kot ipd.). Znotraj tega razreda nato izračunajo, s kakšnim odstotkom je tak strel končal v голу, ter to vrednost prištejejo faktorju, če se taka priložnost zgodi na opazovani tekmi. Podjetja z najbolj natančnimi podatki zanje navadno zahtevajo plačilo, nekaj pa je tudi takih s prosto dostopnimi arhivi. Moj sin je tako uporabil podatke strani *understat.com*.



**Slika 2.** Primer faktorja xG - kljub enakovrednemu srečanju je Tottenham slavil zmago, ki je videti zelo zanesljiva.

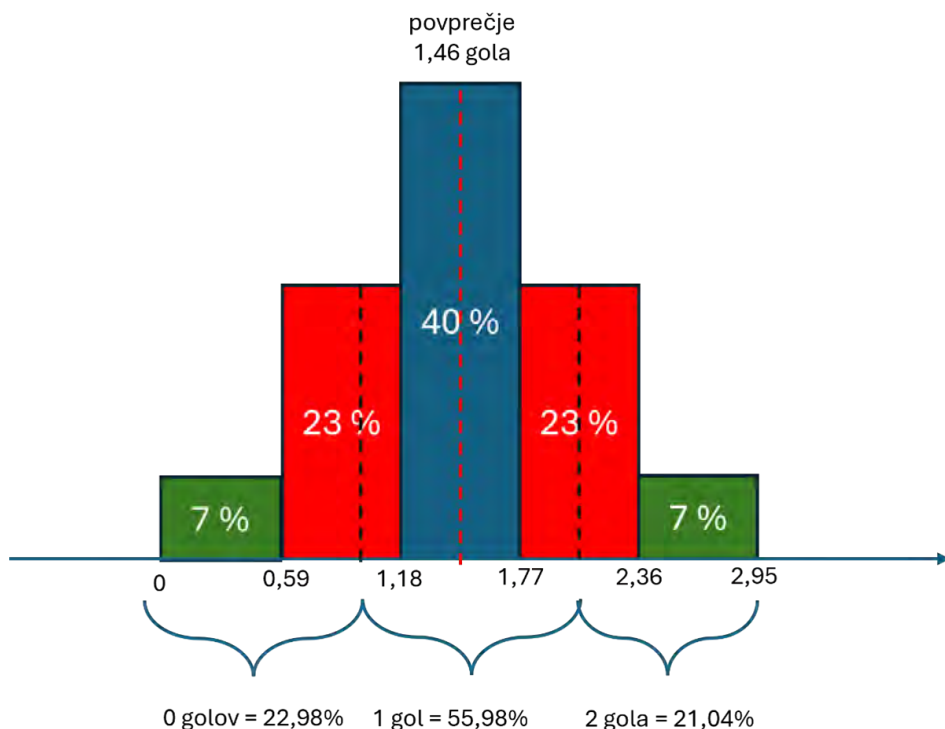
Faktor xG je nato kombiniral z dejanskim številom golov. In sicer tako, da je za vsako od ekip, ki se bosta pomerili, zbral štiri tipe podatkov za pet predhodnjih tekem - število doseženih golov; faktor xG; število prejetih golov nasprotnika; faktor xG ekip, ki so igrale proti nasprotniku. Povprečje teh podatkov je vrnilo informacijo, ki je upoštevala število ustvarjenih priložnosti, učinkovitost ekipe, pa tudi obrambno usposobljenost nasprotnika.

xG MCI	G MCI	xG nasprotnik	G nasprotnik	
2,16	0	1,54	2	
2,6	1	1,66	0	<b>Povprečje</b>
2,35	1	1,02	1	<b>1,46</b>
3,16	1	1,09	2	<b>Širina</b>
1,37	2	1,34	1	<b>0,59</b>

**Tabela 1.** Izračun pričakovanega števila golov ekipe Manchester City na tekmi proti Liverpoolu.

Dobljena vrednost je predstavljala oceno, koliko golov naj bi na dani

tekmi dosegla posamezna ekipa. Nato sem mu predstavil poenostavljeno obliko normalne porazdelitve, v kateri sva ocenila, da je verjetnost, da bo ekipa dosegla dvakrat več golov, zanemarljiva. Dvakratnik te vrednosti sva razdelila na pet intervalov, ter v sredinskega porazdelila 40 % ploščine, v sosednja 23 %, v skrajna pa 7 %. Od tod je prebral, kakšna je verjetnost, da bo ekipa dosegla določeno število golov.



**Slika 3.** Ocena verjetnosti, koliko golov bo na tekmi z Liverpoolom zabil Manchester City.

Ideja za to je bila povzeta po neformalnem spletnem gradivu, v katerem je ameriški profesor opisoval, na kakšen način podeljuje ocene v pet kakovostnih razredov. In sicer, najprej izračuna povprečje in varianco rezultatov, nato pa ocene razdeli v pet kvartilov in - tako je zapisal - pri zadostnem številu študentov, ki pišejo test, navadno dobi omenjeno razporeditev 7–23–40–23–7, kar predstavlja delež študentov s posamezno oceno. To se sklada tudi z grobo oceno ploščine pod grafom standardne normalne porazdelitve nad intervali  $[k - 0.5, k + 0.5]$  za celoštevilске vrednosti  $k$  med  $-2$  in

2. Kot zapisano zgoraj, sem se razlagi, kaj je varianca, izognil tako, da sem mu svetoval, naj dolžino petih kvartilov oceni kar z dvakratnikom pričakovane štveila golov. Ko je bila naloga že tik pred koncem, sem se spomnil, da bi bilo verjetno še bolj naravno uporabiti binomsko porazdelitev - na primer za štveilo grbov pri štirih metih kovanca - t.j.  $6, 25 - 25 - 37, 5 - 25 - 6, 25$ , a je bil eksperimentalni del že izveden, zato je metoda ostala nespremenjena. V vsakem primeru pa sem se z diskretno porazdelitvijo izognil določenemu integralu, saj je sin lahko deleže računal s ploščinami pravokotnikov, kar je bilo v okviru njegovih zmožnosti.

Ko je izračun ponovil tudi za nasprotno ekipo, je lahko ocenil verjetnost vseh možnih izidov ter določil kvote za tri glavne dogodke - zmaga domačih oz. gostov in remi. Od tod je dobil kvote.

<b>0:0</b>	<b>0:1</b>	<b>0:2</b>
2,85 %	6,94 %	2,61 %
<b>1:0</b>	<b>1:1</b>	<b>1:2</b>
8,63 %	20,36 %	7,65 %
<b>2:0</b>	<b>2:1</b>	<b>2:2</b>
8,60 %	20,95 %	7,65 %
<b>3:0</b>	<b>3:1</b>	<b>3:2</b>
3,07 %	7,49 %	2,82 %
<b>4:0</b>	<b>4:1</b>	<b>4:2</b>
0,10 %	0,24 %	0,09 %

**Tabela 2.** Ocena verjetnosti posameznih izidov na tekmi Liverpool-Manchester City.

Ustvarjena metoda je vračala razmeroma dobre rezultate. Ocenjene verjetnosti so od Googlovih napovedi, ki so bile postavljene kot referenčna vrednost, odstopale za manj kot 10 %. Zaznati pa je bilo moč eno pomanjkljivost. Upoštevala je zgolj izide, brez zavedanja o tem, kako močni ekipi se sploh merita. Na primer, če je neko, sicer razmeroma kvalitetno moštvo, zadnjih pet tekem odigralo proti močnim nasprotnikom, je bila ocenjena vrednost za njegovo zmago proti zadnjeuvrščeni ekipi lige prenizka, čeprav je veljalo za izrazitega favorita. Zato je bil razvit ustrezen dodatek.

### 3. Transfermarkt in moč ekipe

Kot že omenjeno, ligaški sistem ponuja lep nabor dodatnih podatkov, ki jih je moč upoštevati. Naloga je upoštevala tri, ki so se sinu glede na njegovo poznavanje nogometa zdeli najbolj pomembni. Upošteval jih je v skladu s

svojo subjektivno presojo. Prvi je bila finančna vrednost ekipe, ki odraža kader moštva in njegovo sposobnost prilagoditve v primeru poškodb in kazni. Ocenjena je bila s pomočjo nemške spletne strani Transfermarkt, ki v svetu nogometa velja za najbolj zanesljivo. Najdražja ekipa v angleški ligi je Manchester City z vrednostjo 1,26 milijarde evrov. Relativno nanjo je bilo vsaki ekipi dodeljeno med 0 in 10 točk. Nadalje je bil ovrednoten tudi delež

$$\frac{\text{vrednost ekipe}}{1,26 \text{ milijarde}} \cdot 10 + \frac{\text{št. zbranih točk}}{\text{št. možnih točk}} \cdot 15 + \text{št. točk v gosteh/doma}$$

**Slika 4.** Formula za ovrednotenje 'moči' ekipe.

točk, ki jih je moštvo osvojilo v prvenstvu, sorazmerno z 0 do 15 točk. Sinova interpretacija je bila, da ta podatek zelo dobro ponazarja uigranost in konstantnost moštva. Nazadnje pa je bilo v račun dodano tudi, kako dobro ekipa trenutno igra doma oziroma v gosteh - upoštevano je bilo število osvojenih točk na zadnjih petih domačih tekmah oz. gostovanjih - to znese do 15 točk, saj zmaga moštvu prinese 3 točke, remi pa 1 točko. Poudarim naj, da je tovrstno oceno in presojo relevantnosti podatkov zasnoval sam, v prvih osnutkih metode pa je upošteval še nekatere dodatne parametre, ki jih je kasneje opustil (poškodbe, prepovedi igranja posameznih igralcev).

	Liverpool	Št. točk	Man City	Št. točk
Transfermarkt (milijarde)	0,93	7,38	1,26	10,00
Število točk na lestvici	31	11,92	23	8,85
Zadnjih 5 doma/v gosteh		15		3
<b>Vsota</b>		<b>34,30</b>		<b>21,85</b>

**Tabela 3.** Primer izračuna za tekmo Liverpool-Manchester City iz prejšnjega razdelka.

Po tej metodi je bil torej vsak izmed nasprotnikov ovrednoten z vrednostjo med 0 in 40 točk, ki jih je bilo treba pretvoriti v oceno verjetnosti. Ideja je naslednja: če bi obe ekipi imeli enako število točk, bi bila verjetnost remija 40 odstotkov in verjetnost zmage ene od ekip 30 odstotkov. Z večanjem razlike v zbranem številu točk se verjetnost remija zmanjša, preostanek odstotkov pa se porazdeli v zmago ene ali druge ekipe sorazmerno s številom zbranih točk. Tako dobimo naslednje formule.

Greš stavit? - predstavitev sinove raziskovalne naloge

$$\text{verjetnost remija} = (40 - \text{razlika}) \%$$

$$\text{preostanek} = 100 \% - \text{verjetnost remija}$$

$$\text{verjetnost zmage A} = \left( \frac{\text{št. točk A}}{\text{št. točk A} + \text{št. točk B}} \right) \cdot \text{preostanek} \%$$

$$\text{verjetnost zmage B} = \left( \frac{\text{št. točk B}}{\text{št. točk B} + \text{št. točk A}} \right) \cdot \text{preostanek} \%$$

**Slika 5.** Formule za pretvorbo točk v oceno verjetnosti.

Dobljene vrednosti za tekmo Liverpool-Manchester City so prikazane v drugi vrstici spodnje tabele.

	Remi	Zmaga Liverpool	Zmaga Man City
<b>Metoda 1</b>	31,08 %	51,71 %	17,20 %
<b>Metoda 2</b>	27,54 %	44,27 %	28,19 %
<b>Povprečje</b>	29,31 %	47,99 %	22,70 %
<b>Googlova napoved</b>	26 %	45 %	29 %

**Tabela 4.** Primerjava metod z Googlovo napovedjo.

Končna metoda za izračun kvot je uporabila povprečje verjetnosti pridobljenih z obema načinoma izračuna. Izračunane vrednosti so se v številnih primerih res zelo dobro skladale z referenčnimi vrednostmi Googla.

#### 4. Eksperimentalni del in zaključek

Zasnova metod za izračun kvot je terjala kar nekaj pojmov, ki presegajo okvir osnovnošolskega kurikuluma, zato je bilo na tem mestu pri raziskovalcu moč začitati zasičenost s teoretičnimi pojmi. S somentorjem sva se zato odločila, da ga od tu dalje usmeriva predvsem v uporabo razvitih orodij in simulacije, s katerimi bo lahko opazoval, kako se izračuni obnesejo v praksi.

Za začetek smo k sodelovanju povabili manjši krog ljudi ter kvote na različne načine testirali na manjšem številu tekem. Med božično-novoletnimi prazniki pa je Nace nato pripravil izračun kvot za celo kolo angleške lige. Na tekme, ki so v spodnji tabeli označene s črko S, je bilo možno položiti samostojno stavo, preostale tekme pa je bilo treba povezati z vsaj še eno napovedjo, saj so bili v njih preveč izraziti favoriti. K sodelovanju je bilo povabljenih 50 odraslih oseb, ki so stavile po 10 žetonov.

19. krog		zmaga domači (1)	zmaga gosti (2)	remi (0)
S	LEI–MCI	5,75	1,9	3,33
	EVE–NOT	4,49	2,57	2,58
	CRY–SOU	1,76	6,93	3,47
S	TOT–WOL	3,21	2,97	2,85
S	FUL–BOU	4,64	2,49	2,61
	BRE–ARS	6,18	1,72	3,87
	MUN–NEW	5,19	1,94	4,33
S	IPS–CHE	8,81	1,44	5,19
	AST–BRI	2,57	4,17	2,69
	WEH–LIV	5,33	1,79	3,95

Tabela 5. Kvote za 19. krog angleške lige

Kot mentor sem bil zelo vesel, da je eksperiment nazorno potrdil osnovni hipotezi - da s stavami zaslužijo le redki in da je pravi zmagovalec stavna hiša. Pozitivni rezultat je namreč zabeležilo le 12 od petdesetih stavcev, najvišji zaslužek pa je bil dobrih 30 žetonov. Bistveno več, skoraj 200 žetonov, je zaslužila stavna hiša.

	MOJE KVOTE	GOOGLE
Zaslužek stavne hiše	195,63	246,56
Št. oseb v plusu	12	11
Št. oseb v minusu	38	39
Št. zadetih stav	20	20
Št. izgubljenih stav	103	103

Tabela 6. Nekateri stavci so žetone razporedili na več stav.

Vseeno je bilo opaziti tudi, da je prostora za izboljšavo še nekaj, saj bi uporaba Googlovih kvot v tej in preteklih simulacijah še nekoliko povečala dobiček hiše.

Kakorkoli, za konec naj le še strnem svoje misli. Zavedam se, da je bila moja situacija posebna, saj sem imel kot starš na voljo bistveno več časa in vpliva na raziskovalca, kot ga imajo mentorji običajno. Vseeno obstaja zorni kot, ki bi ga rad predal učiteljem, ki morebiti razmišljajo o mentoriranju nalog. Prepogosto se nam zgodi, da izberemo zahtevno in abstraktno literaturo, ki je našim varovancem dosegljiva le v omejenem obsegu in ima zelo ozek, morda celo prazen presek z njihovim vsakdanom. Glavni del naloge tako postane branje in študiranje knjig. Alternativno temu ponuja matema-



tično modeliranje, ki navadno bazira na enostavnih aritmetičnih operacijah in ga je moč dopolniti s simulacijami ali eksperimenti, metode zanje pa lahko učenci zasnujejo sami in - če niso dovolj učinkovite - to pokomentirajo v nalogi. Konkretno, tudi sam o metodologiji izračuna kvot pred začetkom raziskovanja nisem vedel ničesar, na spletu pa nisem našel literature, ki bi omogočala direktno uporabo za dan primer. Vseeno sem ga raje usmeril v poskus razvoja svojih metod v nogometu, kot pa v uporabo ustaljenih metod v npr. zavarovalništvu, kjer so gradiva bila dostopna.

Dodam naj tudi, da se je v danem primeru eksperimentalni del izkazal kot dopolnitev, ki je sina pritegnila celo bolj kot zasnova metod, saj so bili razmeroma tečni izračuni in vnosi podatkov v Excelove tabele njegov najljubši del naloge - med drugim je celo izjavil: 'Raje cel dan računam, kot pol ure berem in pišem o verjetnosti!' Kljub vsemu pa je bilo ob njegovih predstavitvah dela moč začutiti, da razvita orodja zares razume in zlahka obrazloži. Le malo manj je navdušen nad konceptom matematične originalnosti kot njegov oče, ki to dela poklicno - računanje je zanj še vedno igra. To je vredno upoštevati, kadar delamo s to starostno skupino.

Kakorkoli, upam, da bo ta prispevek k tovrstnemu poskusu uporabne matematike ali mentoriranju naloge nagovoril še koga. Težko je namreč ne opaziti, da na področju raziskovalnih nalog prevladujejo družboslovne teme. Res je, da naravoslovci ta manko nato uspešno nadomeščamo s tekmovanji v znanjih, vseeno pa lahko kot profesor na fakulteti potrdim, da imajo morda prav zato kasnejši študenti matematike prepogosto občutek, da je cilj študija uspešno reševanje nalog na kolokvijih in izpitih, veliko bolj nesuvereni pa so, kadar morajo sami zasnovati probleme, ki naj bi jih raziskovali. Zato je mentoriranje za matematiko navdušenih osnovnošolcev dobrodošlo tudi iz te perspektive, pa najsi gre za vaše lastne ali tuje otroke.

## LITERATURA

- [1] S. Jerič, *Statistika za začetnike*, Cankarjeva založba, Ljubljana, 2023.
- [2] *Vodič po stavah: Stave online*,  
<https://stave-online.com/sportne-stave/> (3. 2. 2025).
- [3] *Kaj je xG: 1xujemanje kaj je xG v nogometni analizi*,  
<https://s1.1xmatch.com/chto-takoe-xg-pokazatel-v-analize-futbolnyh-matchej/>  
(3. 2. 2025).
- [4] *100-odstotnih priložnosti ni: RTV SLO, 100-odstotnih priložnosti v nogometu ni oziroma so 30-odstotne*,  
<https://www.rtv slo.si/sport/sportni-sos/sos-odmev/100-odstotnih-priloznosti-v-nogometu-ni-oziroma-so-v-resnici-30-odstotne/486320> (3. 2. 2025).

## Ob devetdesetletnici zaslužnega profesorja Antona Suhadolca



Profesor Anton Suhadolc je 19. aprila 2025 praznoval devetdeset let življenja. Svojo življenjsko pot je povzel v štirih odlično sprejetih oddajah v seriji Spomini na RTV Slovenija, predvajanih v začetku leta 2025. Če še niste videli, se vam res splača pogledati, saj so oddaje lahko dostopne v arhivu serije. Vsi, ki nam je bil učitelj ali kolega, ga poznamo kot prijaznega, odprtega človeka dobre volje, ki je zmeraj pripravljen priskočiti na pomoč. Zanima ga marsikaj. Ni se ukvarjal samo z matematiko, veliko piše tudi o zgodovini matematike in o polpretekli zgodovini, predvsem družinski. Veliko se ukvarja tudi z botaniko, cveticami in je strokovnjak na področju komercialno manj zanimivih lesov – tako dreves kot grmovnic. Rad ima življenje, ljudi in njihove zgodbe in užitek je poslušati njegova opažanja in spoznanja. Včasih kaj komentira tudi z rahlo ironijo.

Rojen je v Ljubljani. Oče Anton (1897–1983) je bil gradbeni inženir in projektant, lep čas tudi desna roka arhitekta Jožefa Plečnika. Mati Natalija (r. Sartori, 1904–2001) je bila učiteljica. Anton Suhadolc je maturiral leta 1953 na bežigrasjski gimnaziji. Po maturi je odšel na kempiranje in prosil mamo, da ga medtem vpiše na študij matematike, ki je takrat poznala le pedagoško smer. Ona pa ga je vpisala na tehnično fiziko. To mu je utemeljila približno takole: »Kot matematik boš po diplomi moral učiti v šoli. Ti pa hodiš v cerkev, zato te bodo sekirali.« Njo so namreč iz tega razloga vrgli iz službe, najstarejšo hčerko pa iz gimnazije. Suhadolc je vseeno študiral matematiko na ljubljanski univerzi. Diplomiral je leta 1957 in dobil Prešernovo nagrado za študente. Še isto leto se je zaposlil na Fizikalnem inštitutu Jožefa Stefana. Ivan Vidav in Josip Plemelj sta Suhadolca in Zvonimirja Bohteta takoj po diplomi povabila, da postaneta asistenta na

univerzi. Bohteta so zaposlili zelo hitro, Suhadolc pa je na odobritev čakal dve leti in nekaj mesecev, do leta 1960. Vmes je odslužil vojaški rok in se vrnil na IJS. Kemik Savo Lapanje mu je par desetletij kasneje dejal približno tole: »Če ne bi jaz zastavil besede zate na Univerzitetnem komiteju Zveze komunistov, ti takrat ne bi dobil mesta na univerzi.« Pomagalo je tudi dejstvo, da je matematikov takrat primanjkovalo. Mimogrede, Savo Lapanje je bil v taborišču Dachau skupaj z očetom pisca tega prispevka.

V letih 1961-63 je Suhadolc kot Humboldtov štipendist študiral na univerzi v Heidelbergu. Tu je razširil svoje znanje matematike. (Takratna matematična predavanja v Ljubljani so bila sicer kakovostna, a ponudba je bila zelo omejena in ponekod rahlo zastarela.) Začel je z delom na disertaciji. Temo: Posplošitev Fourier-Laplaceove transformacije mu je dal profesor Heinz Günther Tillmann. Delo je dokončal v Ljubljani pod vodstvom Ivana Vidava in doktoriral leta 1965. Septembra tega leta je bil na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo (FNT) izvoljen v naziv docenta. Na tej fakulteti je ostal do njene razdelitve in se leta 1998 upokojil na Fakulteti za matematiko in fiziko (FMF). Leta 1975 je postal izredni, leta 1981 redni profesor. Leta 2002 je dobil naslov zaslužni profesor Univerze v Ljubljani.

Kot Fulbrightov štipendist je bil v šolskem letu 1969/70 na matematično visoko rangirani University of Wisconsin (UW) v Madisonu (ZDA), kjer je del časa tudi predaval. Sočasno je bil na UW kot doktorski študent Jože Vrabec, ki je tam doktoriral v zelo kratkem času.

Leta 1977/78 je bil Suhadolc gostujoči profesor na Florida State University v Tallahasseeju (prestonici Floride). Šlo je za izmenjavo s topologom Wolfgangom H. Heilom, ki je bil ta čas v Ljubljani. (Heil je bil mentor pri doktoratu Janeza Rakovca leta 1979.) Leta 1986 je bil profesor Suhadolc tri mesece na FernUniversität v mestu Hagen v Porurju, v okviru večletnega sodelovanja s profesorjem Krešimirjem Veselićem.

Profesor Suhadolc je bil na začetku svoje kariere med pionirji na področju računalništva in numerične matematike v Sloveniji. Programiranja v Fortranu se je naučil na tečaju v Heidelbergu. Z Egonom Zakrajškom sta naredila program, ki je optimiziral mešanico krmil za rejo živali. Suhadolc je preštudiral metodo simpleksov in jo razložil Zakrajšku, ki je vse sprogramiral. Tako so po Zakrajškovih besedah slovenske reje lahko konkurirale tistim iz drugih jugoslovanskih republik, ki so imele boljše pogoje za pridelavo krme. Podobno sta z Zakrajškom izdelala program, ki je po Jacobijevi metodi določal lastne vrednosti simetričnih matrik.

Profesorju Suhadolcu je vseč numerična matematika in jo je tudi predaval. Pisec teh vrstic se je obrnil nanj z vprašanji iz numerične matematike in profesor si je rad vzel čas za pojasnila.

S fizikom Sergejem Pahorjem sta dokazala nov rezultat za linearizirano Boltzmannovo enačbo za polravnino. Znanе so bile lastne vrednosti ustreznega operatorja. Pahor in Suhadolc pa sta prispevala dokaz, da ustrezne lastne funkcije sestavljajo kompleten sistem. Ta uspeh jima je prinesel leta

1974 Kidričevo nagrado, ki je bila predhodnica današnje Zoisove nagrade. S Pahorjem sta bila velika prijatelja.

Profesor Suhadolc je predaval vrsto predmetov. Piscu teh vrstic je recimo predaval Funkcionalno analizo in Teorijo mere. V okviru tega nam je dal tudi uporabno znanje topologije. (Najbolj osnovne pojme topologije smo pred tem v prvem letniku slišali pri Prijateljevem predmetu Množice in strukture.) Razpon predmetov, ki jih je učil, je bil izredno širok. Na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo, Biotehniški fakulteti, Fakulteti za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo, Fakulteti za elektrotehniko in Fakulteti za telesno kulturo je predaval (na dodiplomskem in podiplomskem študiju) Linearno algebro, Analizo III in Analizo IV; občasno pa tudi Numerično analizo, Teorijo analitičnih funkcij, Navadne diferencialne enačbe, Parcialne diferencialne enačbe, Integralske enačbe, Asimptotično analizo, Aproksimativne metode in Teorijo distribucij.

Precej let je vodil podiplomski seminar in tretjestopenjski študij na Oddelku za matematiko; na njem je predaval Operatorsko teorijo in Linearne topološke prostore. Na tretji stopnji je predaval še Funkcionalno analizo in Variacijske metode za mehanike. Po upokojitvi je šest let predaval na visokošolskem študiju v Novem mestu, a nad resnostjo in pozornostjo poslušalk in poslušalcev menda ni bil pretirano navdušen. Tako motivirane in hvaležne študente kot na študiju matematike in fizike na FMF je pač težko najti.

V letih 1981–1983 in 1987–1989 je bil predstojnik Oddelka za matematiko. V letih 1995/96 je bil prvi dekan nove Fakultete za matematiko in fiziko (FMF). Od 2006 do 2009 je bil član Odbora za Zoisove nagrade in priznanja Republike Slovenije. Na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko (IMFM) je bil vodja Oddelka za matematiko in kasneje predsednik inštitutskega sveta.

Bibliografija profesorja Suhadolca ima 601 enoto. Napisal je vsaj 15 univerzitetnih učbenikov in monografij. Omenimo zgolj obsežnejše: Linearni topološki prostori I in II (1979 in 1987), Nekorektni problemi (1984), Integralske transformacije in integralske enačbe (1985), Potencialna teorija (1995), Navadne diferencialne enačbe (1996). Leta 2011 je izšla monografija Življenje in delo profesorja Riharda Zupančiča o matematiku in drugem rektorju ljubljanske univerze.

Ogromno je prispeval v Obzornik za matematiko in fiziko, tako člankov kot ocen knjig. Pisal je tudi v Presek, denimo dva članka z naslovom Matematične nepake leta 1975, Matrike kot posplošitev pojma števila (1987). Vseh člankov za OMF in Presek je malo manj kot šestdeset. Od 1986 do 2019 je za Mathematical Reviews in kasneje za Mathematical Reviews on the Web prispeval več kot 250 poročil o člankih in knjigah. Bil je zelo zaželen kot poročevalec o matematični literaturi s področja nekorektnih problemov, napisani v ruščini, ukrajinščini in beloruščini.

Bil je mentor pri 6 magistrskih delih in 66 diplomskih delih, od katerih so

štiri dobila študentsko Prešernovo nagrado (avtorji Edvard Kramar, Matjaž Omladič, Milan Hladnik in Janez Mrčun).

Dolga leta je klasificiral literaturo, ki je prihajala v Matematično knjižnico, in pomagal odločati pri naročanju. Uredil je Plemljevo pisno zapuščino. Napisal je vrsto člankov o zgodovini slovenske matematike, imel govore ob obletnicah, odkritjih spominskih obeležij, prispeval k razstavam s tega področja.

Ves čas je bil eden od stebrov v Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (DMFA), dolgoletni član upravnega odbora in smo se z njim in soprogo redno srečevali na občnih zborih. V letih 1977-79 je bil predsednik DMFA. Štiri leta je bil podpredsednik DMFA, po upokojitvi član častnega razsodišča. Dobrih dvajset let je bil v uredniškem odboru Obzornika za matematiko in fiziko in devet let urednik za matematiko tega društvenega glasila. Eno leto je predsedoval Komisiji za tisk. Leta 2001 je postal častni član društva.

Profesor Suhadolc ima od nekdanjega veselja z botaniko, z ustvarjanjem herbarija in z zbiranjem eksotičnih rastlin. Piscu teh vrstic je dal več lončkov, denimo *Streptocarpus* z enim samim ogromnim listom in vijoličnim cvetom. Med svojim bivanjem na Floridi je raziskoval okoliško naravo, fotografiral in zbiral primerke za herbarij. V ZDA je več na dotik strupenih grmov in profesorju so se »spominčki« na nogah zacelili šele mesec dni po vrnitvi v Slovenijo. Herbarijske primerke in fotografije s Floride je razstavil v Knjižnici Otona Župančiča. V reviji *Proteus* je recimo objavil članek *Kaj raste ob Savi* (1995). Štiri članke o gojenju sobnih in balkonskih rastlin je objavil v reviji *Moj mali svet* (2003–2004).

Bil sem zraven, ko je o botaničnih zadevah razpravljal z dvema drugima poznavalcema in prijateljema. To sta fizik in računalnikar Janez Lesjak »Lesi«, stalen gost na matematičnih seminarjih za širšo publiko, in naš pokojni kolega Marko Petkovšek. Lesjak je v tem krogu pred slabimi tridesetimi leti razmišljal o programu, ki bi iz lista prepoznal rastlino. To je danes dokaj dobro uresničeno.

Na svojem domu profesor Suhadolc rad pokaže lepe primerke nenavadnih cvetic in drugih rastlin. Kasneje je začel zbirati lesove in postal strokovnjak na tem področju. Na izletih po Sloveniji se je ustavljal na žagah, spraševal in pregledoval skladovnice, da bi dobil bolj barvite vrste lesa. Zgodilo se je, da je profesor Suhadolc na podeželju videl podrto veliko hruško. Stopil je do lastnika, ki jo je bil pripravljen prodati. Profesor Suhadolc je naročil prevoz, a dvigalo prvega tovornjaka ni zdržalo teže, hidravlika je začela puščati. Šele tretje vozilo je deblo spravilo na žago. Rad pa je vzel tudi manjše kose redkih lesov, le da so bili dober meter dolgi. Piscu teh vrstic je odpeljal les tise, slive, pušpana, glicinije . . . Iz tega so nastali – z veliko vložnega časa in tudi s podporo bratov arhitektov Matije in Janeza – čudoviti primeri pohištva: omare iz oreha in hruške, mize z raznobarvnimi vzorci, izjemni ladijski podi in parketi v hiši pod Ježo nedaleč od Save za Bežigradom. Precej tega lesa

pa je uporabil brat, profesor Janez Suhadolc, za izdelavo umetniških stolov. Pa tudi kako lastnoročno narejeno darilce za prijatelje v obliki predalčka za pisala ipd. je nastalo iz tega materiala. Izdelati je dal tudi 160 lesenih krogel različnih premerov iz svoje zbirke lesov. Izbor vseh teh lesenih izdelkov je bil večkrat razstavljen. Sama knjižnica okrog sto domačih in okrog osemsto tujih vzorcev lesov pa je zdaj v Tehniškem muzeju v Bistri.



Po upokojitvi mu je založba Narava izdala tri knjige, rezultat njegove ljubezni do botanike in lesov: Les naših dreves in grmovnic (2012), Sadje po svetu (2022) in Kratko o metuljnicah (2023). Založba A & T Svetovanje pa mu je natisnila knjigo Začimbe (2022). V samozaložbi je v letih 2013–2025 izdal še devet tovrstnih del. Zadnje nosi naslov Eterična olja (2025). Izdal je tudi dnevnik, ki ga je njegov oče pisal med delom v partizanskih enotah.

Včasih se je rahlo norčeval iz športa in kolege, ki so se pri športu poškodovali, spraševal: »Ali je bil šport zdrav?« A po drugi strani je rad v naravi. Pred desetletji je zdržal celo dolgo gorsko turo na težko dostopno Mrzlo goro v Kamniško-Savinjskih Alpah. Vzpon je vključeval plezanje. Vodil ga je dolgoletni prijatelj, pet let mlajši profesor Jože Vrabc, ki mu je pomagal na nekaj mestih, ki so zahtevala veliko moči v rokah. Po pristopni poti se praktično ne bi mogla vrniti. Sestop mimo Matkovega škafa se je profesorju Suhadolcu potem zdel kar normalen, čeprav vse poti na Mrzlo goro in z nje veljajo kot zelo zahtevne.

Za razliko od kolega profesorja Gabrijela Tomšiča, ki je rad hodil v hribe, a je naravo videl predvsem kot potencial za pridelovanje hrane, lesa ipd., ima profesor Suhadolc naravo rad samo po sebi.

Po upokojitvi sta z ženo, doktorico kemije Tatjano Suhadolc, veliko opazovala. Zelo zanimivo je bilo poslušati vtise radovednega in bistrega opazovalca, ki se je poskušal živeti v tamkajšnji okolje. V južni Aziji mu je indijski krojač v ekspresno kratkem času sešil obleko po meri in mu zagotovil, da lahko po shranjenih merah kadarkoli dobi novo. Na Šrilanki je iz ženitnih oglasov dobil uvid v družbeno strukturo.

Kot že rečeno, je profesor Suhadolc vedno pripravljen pomagati. Avtor tega prispevka je pred desetletji mislil, da je hitro prebolel gripo in šel v službo, a je zmeraj bolj kašljal. Ko je to omenil profesorju Suhadolcu, mu

je ta rekel: »Treba bo k zdravniku.« Imel je prav, na rentgenu je bila vidna pljučnica. To še zdaleč ni bil edini tak koristen nasvet in tudi drugi so imeli podobne dobre izkušnje.

Tudi danes mirnost, optimizem, prijaznost in bogastvo izkušenj profesorja Suhadolca razveselijo prisotne. Želimo mu še mnoga ustvarjalna leta v krogu njegovih domačih, prijateljev in kolegov.

*Peter Legiša*

### **Zvonimir Bohte - Dragi je dopolnil 90 let**



Zaslужni profesor dr. Zvonimir Bohte - Dragi, starosta slovenske numerične matematike, je letos praznoval 90 let. Na Univerzi v Ljubljani, kjer je na Fakulteti za matematiko in fiziko in predhodnicah služboval štirideset let, je opravil pionirsko znanstveno in pedagoško delo na področju uporabne in računalniške matematike, s poudarkom na numerični linearni algebri in analizi, matematičnem modeliranju in programiranju. Kot izredno dobremu pedagogu in sposobnemu organizatorju mu je uspelo zbrati skupino mladih kolegov in postaviti temelje ljubljanski šoli za uporabno matematiko. Večina matematikov, učiteljev, ki so ali še poučujejo predmete teh vsebin na Univerzi v Ljubljani, je njegovih študentov ali njihovih akademskih potomcev.

Zvonimir Bohte se je rodil 17. junija 1935 v Ljubljani. Mati Anica, rojena Matelič, je bila gospodinja, oče Zvonimir je bil topniški oficir v Vojski Kraljevine Jugoslavije. Do leta 1939 so živeli v Mariboru, nato do konca

aprila 1941 v Beogradu, kjer je bil oče major v generalštabu. Vojno so preživeli v Ljubljani, po njej je oče delal v prosveti trgovske stroke, nazadnje kot direktor Šolskega centra za blagovni promet. Morda se ga kdo spomni tudi kot vodjo poročnih obredov na ljubljanskem magistratu. Leta 1958 se je Zvonimir Bohte oženil s Tamaro Kandare, sošolko od četrtega razreda nižje gimnazije, kasneje študentko nemščine in angleščine. Rodila sta se jima sin Bojan, rojen 1959, in hči Maja, rojena 1966. Tako Bojan kot Tamara sta žal že pokojna, Zvonimir Bohte pa danes domuje na Koleziji v Ljubljani.

Osnovno šolo je obiskoval v vojnih letih 1941–1945 in s šolanjem nadaljeval na gimnaziji Poljane. Maturiral je leta 1953. V gimnazijska leta sodi tudi veselje do košarke, ki ga je zapisalo med ustanovitelje predhodnika košarkarskega kluba Slovan. A leta 1953 je postal študent matematike na Univerzi v Ljubljani, in šport je ostal le rekreativni izziv. Diplomiral je leta 1957, po diplomskem izpitu iz šestih predmetov, treh pri profesorju Josipu Plemlju in treh pri profesorju Ivanu Vidavu. Za diplomsko delo Dvoparametrične grupe matrik je prejel študentsko Prešernovo nagrado.

Po diplomi se je na kratko zaposlil na Fizikalnem inštitutu Jožefa Stefana. Leta 1958, po odsluženem vojaškem roku v Varaždinu in Klani nad Reko, je postal asistent za matematiko na Katedri za matematiko, delu Naravoslovne fakultete Univerze v Ljubljani. V šolskem letu 1961/62 je bil na izpopolnjevanju iz programiranja na Univerzi v Københavnu kot štipendist organizacije UNESCO. Leta 1962 je na Univerzi v Ljubljani postal predavatelj za numerično analizo. Od leta 1964 je bil višji strokovni sodelavec v Računskem centru Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko, v letih 1965–1968 pa njegov predstojnik. V šolskem letu 1966/67 je bil znanstveni sodelavec na Battersea College of Technology (University of Surrey) v Londonu, kjer se je ukvarjal predvsem z numeričnimi problemi v linearni algebri. Pod mentorstvom profesorja Ivana Vidava je leta 1971 doktoriral iz matematičnih znanosti z disertacijo Analiza zaokrožitvenih napak pri reševanju pasovnih sistemov linearnih enačb po Gaussovi metodi.

Leta 1972 je bil na Univerzi v Ljubljani izvoljen za docenta, leta 1977 je postal izredni, leta 1982 pa redni profesor za numerično matematiko. Upokojil se je leta 1999. Univerza v Ljubljani mu je leta 2002 podelila naziv zaslužni profesor.

Študentom matematike je predaval predmete numerične metode, numerična analiza in končna aritmetika. Poleg rednih predavanj za študente matematike na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo, kasneje Fakulteti



za matematiko in fiziko, je predaval razne predmete s področja numerične matematike tudi za študente računalništva in informatike na drugi stopnji Fakultete za elektrotehniko, na tretji stopnji konstrukcijske smeri Fakultete za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo, na tretji stopnji metalurgije na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo, na tretji stopnji Tehnične vojne akademije v Zagrebu in na tretji stopnji matematike na Prirodoslovno-matematični fakulteti v Zagrebu. Pred upokojitvijo je predaval tudi matematične predmete splošne narave. Kot gost je imel več predavanj na univerzah v Trstu in Novem Sadu. Večkrat je gostoval tudi v National Physical Laboratory v Angliji.

Zvonimir Bohte je bil izvrsten, pri študentih zelo cenjen predavatelj. Vedno pripravljen, z jasnimi razlagami in obilo motivacije za slušatelje. Zelo priljubljen je bil tudi kot mentor, saj je svetoval pri 87 visokošolskih diplomah in 11 magisterijih. In ne nazadnje, bil je mentor pri pripravi doktorske disertacije štirim akademskim sinovom. Vse od ustanovitve do leta 1995 je vodil skupni podiplomski seminar Oddelka za matematiko Univerze v Ljubljani in Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko. Danes se imenuje Seminar za numerično analizo in je nepogrešljivo okolje za raziskovalno delo na tem področju. Na njem se tedensko sestajajo in poročajo numerični matematiki Univerze v Ljubljani in širše. Pogosta so tudi predavanja tujih gostov.

Številčno merilo raziskovalnih, pedagoških in drugih objav Zvonimirja Bohteta se ustavi na številu 292. Mednje sodi 15 izvirnih znanstvenih razprav v uglednih revijah, 24 strokovnih člankov, 18 objavljenih znanstvenih prispevkov na konferenci, 8 univerzitetnih učbenikov, 5 strokovnih monografij, 18 recenzij, samostojni prispevki v monografskih publikacijah ipd. Aktivno je sodeloval na številnih konferencah doma in v tujini. Na dveh v Ljubljani je bil predsednik organizacijskega odbora in urednik zbornikov referatov.

Kaj vse ga je zanimalo pri raziskovalnem delu, lahko bežno osvetlimo le tako, da izberemo nekaj naslovov objavljenih člankov: *Numerical solution of the inverse algebraic eigenvalue problem*, *On solvability of some two-parameter eigenvalue problems in Hilbert space*, *Bounds for rounding errors in the Gaussian elimination for band systems*, *On composite polynomial deflation by a quadratic factor*, *Adaptive methods for numerical solution of stiff systems of ordinary differential equations*. Za kaj več je treba seveda poseči po objavah samih.

Zvonimir Bohte sodi med pomembne pisce matematične strokovne literature pri nas. Je avtor več knjig, ki sodijo na področje numerične matematike, in se zvrstijo med monografije, učbenike in poljudnejša dela. Uporabljajo jih tako tisti, ki jim je numerika potrebna pri vsakdanjem delu, kot študentje pri raznih numeričnih predmetih. Pisane so v jasnem, lahko razumljivem jeziku, opremljene s številnimi primeri in tudi nalogami. Naštejmo na kratko naslove: *Numerično reševanje enačb*, *Uvod v numerično računanje*, *Numerične metode*, *Numerično reševanje nelinearnih enačb*, *Numerično reševanje sistemov linearnih enačb* in *Numerična analiza*. Nekatere med naštetimi knjigami so bile izdane večkrat.



Nedvomno je prispeval tudi k širjenju matematične kulture v Sloveniji. Tu je treba omeniti vrsto poljudnejših sestavkov v *Preseku* in *Obzorniku* za matematiko in fiziko, ki na preprost način bralca spoznavajo s pomembnimi numeričnimi problemi in računskimi algoritmi. Več let je sodeloval v sekciji za popularizacijo matematike pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov ter je bil član uredniškega odbora *Obzornika* za matematiko in fiziko.

Vsekakor ne smemo preskočiti njegove vloge na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko. Začetki približno sovpadajo s prihodom prvega elektronskega računalnika ZUSE Z-23 v Slovenijo leta 1962. Bil je nameščen v prostorih Računskega centra Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko na Lepem potu v Ljubljani in dostopen le majhnemu krogu programerjev-matematikov. Zvonimir Bohte je bil eden od njih. Nov stroj in reševanje nalog, ki so bile do tedaj nedosegljive, je zahtevalo povsem nov pogled na numerično računanje. Kaj vse so bili potrebni osnovni koraki, se najboljše prebere v njegovem elaboratu *Študij numeričnih metod in izdelava osnovnih*

*podprogramov za računalnik Z-23*. Raziskovanje novih metod je imelo tudi praktične cilje. Kot predstojnik Računskega centra (1965–1968) je pokazal velik posluh za reševanje problemov, ki so nastajali v gospodarstvu, naj je šlo za razne optimizacijske naloge, kot npr. linearno programiranje, ali za reševanje povsem tehnično obarvanih problemov, kot je npr. načrtovanje turbin.

Na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko je bil predstojnik Oddelka za matematiko (1972–1974), bistveno zahtevnejše strokovno-administrativno opravilo pa sta bila dva štiriletna direktorska mandata (1982–1990). Tu velja posebej omeniti težke čase najhujše inflacije in skrb direktorja za ohranjanje realne vrednosti prihranjenih inštitutskih sredstev. V času prvega njegovega mandata je vlada začela akcijo finančne podpore usposabljanju mladih raziskovalcev. Kot direktor je Zvonimir Bohte razumel priložnost za matematiko in se pri črpanju sredstev res polno angažiral. Leta 1985 sta bila v okviru te akcije na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko nastavljena prva dva mlada raziskovalca, kasneje še številni drugi. Danes lahko ugotovimo, da so prav mladi raziskovalci prinesli velik preskok v širini in kvaliteti raziskovalne matematike v Sloveniji.

Dragi, kot ga kličemo, je duhovit, rojen govornik. Ob srečanjih neformalne narave na Oddelku za matematiko je po pravilu prvi prevzel besedo in s pričakovanjem smo prisluhnili njegovim iskrivim besedam in šalam. Tudi na formalnih sejah je imel vedno mnogo zamisli. A če je začutil, da med kolegi enotnega soglasja ni, jih je hitro umaknil. Ni se branil odgovornih funkcij na oddelku ali fakulteti. Posebej je treba omeniti njegovo uspešno vodenje izvršilnega odbora Oddelka za matematiko in delo v senatu Fakultete za matematiko in fiziko.

Z Dragijem je vedno prijetno pokramljati in ga povprašati za svet, o preteklih in bodočih problemih. Ni dvoma, da bo tudi velikodušno oprostil vse spodrsrljaje in pomanjkljivosti v temle sestavku.

*Jernej Kozak*

DIAMANTNI SPONZOR DMFA SLOVENIJE



# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, NOVEMBER 2025

Letnik 72, številka 3

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

---

## VSEBINA

<b>Članki</b>	<b>Strani</b>
Fokusiran Gaussov snop (Andrej Petelin) .....	81–100
Greš stavit? - predstavitev sinove raziskovalne naloge (Uroš Kuzman) .....	101–111
<b>Novice</b>	
Ob devetdesetletnici zaslužnega profesorja Antona Suhadolca (Peter Legiša) .....	112–117
Zvonimir Bohte - Dragi je dopolnil 90 let (Jernej Kozak) .....	117–XI

---

## CONTENTS

<b>Articles</b>	<b>Pages</b>
Focused gaussian beam (Andrej Petelin) .....	81–100
Wanna bet? - presentation of my son's research project (Uroš Kuzman) .....	101–111
<b>News</b> .....	112–XI

---

**Na naslovnici:** Vzorec laserske svetlobe, ki se sipa na vinskih solzah (foto: Aleš Mohorič)