Priprave na MMO 2026 – 6. domača naloga

1. Imamo vrvico, na kateri je nanizanih 2026 biserov. Ana in Bor igrata igro. V vsaki potezi igralec, ki je na vrsti, prereže vrvico med dvema biseroma. Igralec, ki ni na vrsti, nato izbere enega izmed dveh nastalih delov vrvice, drugega pa odstrani. Igra se nadaljuje na izbranem delu vrvice. Igralec izgubi, če potezo začne z vrvico, na kateri je samo en biser. Igro začne Ana, nato sta igralca na vrsti izmenično. Kdo ima zmagovalno strategijo?
2. Na tabli so zapisana naravna števila od 1 do 119. Cene in Domen igrata igro. V svoji potezi igralec s table izbriše 9 števil. Ko na tabli ostaneta le še dve števili, je igra končana in Cene dobi število točk enako absolutni vrednosti razlike teh dveh števil. Igro začne Cene, nato igralca poteze delata izmenično. Določi največje naravno število N, za katero lahko Cene dobi vsaj N točk ne glede na Domnove poteze.
3. Naj bo n naravno število. Podmnožica množice $\{1, 2, \dots, n\}$ je *olimpijska*, če so vsi njeni elementi večji ali enaki njeni moči. Določi število olimpijskih podmnožic množice $\{1, 2, \dots, n\}$.
4. Naj bo n naravno število. V sobi je v vrsto postavljenih n stolov, ki so od leve proti desni označeni z 1, 2, ..., n. V sobo po vrsti vstopa n oseb, ki se zaporedoma posedajo na stole. Pri tem velja, da ima i-ta oseba svoj najljubši stol a_i. Ko oseba vstopi v sobo, gre do svojega najljubšega stola in sede nanj, če je prost, sicer pa sede na najbližji prost stol, ki je desno od njej najljubšega. Če takega stola ni, jezno odide domov. Določi število zaporedij a_1, a_2, ..., a_n, za katera se lahko posede vseh n oseb.

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **25. 2. 2026** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Zadeva elektronskega sporočila naj vsebuje niz »6. domača naloga«, nalogo pa oddajte v eni pdf datoteki.

Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani/a ______________ izjavljam, da sem vse naloge reševal/a
ime in priimek
samostojno in brez pomoči drugih oseb.

______________ Podpis: ______________
kraj in datum

Rešitve

1. Zmagovalno strategijo ima Ana. V prvi potezi lahko vrvico z 2026 biseri razdeli na dva dela, ki vsebujeta liho število biserov. Ne glede na to, katerega izmed dveh delov izbere Bor, se bo igra nadaljevala na vrvici z lihim številom biserov. Ko Bor prereže vrvico, bo en del vseboval liho, drugi pa sodo število biserov. Za nadaljevanje igre Ana izbere del s sodim številom biserov.

   Opazimo, da Ana lahko vsakič izbere del s sodo mnogo biseri in ga razdeli na dva dela z liho mnogo biseri. Posebej to pomeni, da na potezi nikoli ne bo začela s samo enim biserom, zato lahko vedno naredi potezo. Ker se število biserov na vrvici v vsaki potezi zmanjša, se bo igra res končala. Ana ima torej zmagovalno strategijo.

2. Dokažimo, da je $N = 64$. Tekom igre bosta Cene in Domen s table izbrisala 117 števil. Ker začne Cene in v vsaki potezi igralec izbriše 9 števil, bo Cene na potezi 7-krat, Domen pa 6-krat.

   Domen skupno izbriše 54 števil, zato lahko poskrbi, da na tabli ni nobenega števila, večjega od 65. Ne glede na Cenetove poteze bo absolutna vrednost razlike zadnjih dveh števil na tabli manjša ali enaka 64.

   Poiščimo še strategijo, s katero lahko Cene doseže vsaj 64 točk. Cene v prvi potezi izbriše števila 56, 57, …, 64. Preostala števila razdeli v pare oblike $(x, x + 64)$. V naslednjih potezah izbriše števila, katerih par je Domen izbrisal v svoji potezi. Če je Domen izbrisal obe števili iz nekega para, Cene izbriše obe števili iz poljubnega drugega para.

   Po vsaki Cenetovi potezi sta na tabli bodisi obe števili iz para bodisi nobeno. Ker je Cene zadnji na potezi, bosta števili, ki ostaneta na tabli, v istem paru. Razlika števil v vsakem paru je 64, zato lahko Cene s to strategijo res zagotovi, da je absolutna vrednost razlike vsaj 64.

3. S $[k]$ označimo množico $\{1, 2, \ldots, k\}$, z a_k pa število olimpijskih podmnožic množice $[k]$. Opazimo, da je vsaka olimpijska podmnožica množice $[n]$, ki ne vsebuje n, tudi olimpijska pomnožica množice $[n - 1]$. Seveda velja tudi obratno. Olimpijskih podmnožic množice $[n]$, ki ne vsebujejo n, je torej a_{n-1}.

   Dokažimo, da so olimpijske podmnožice množice $[n]$, ki vsebujejo element n, v bijekciji z olimpijskimi podmnožicami množice $[n-2]$. Naj bo $A' = A \cup \{n\}$, pri čemer velja $n \notin A$, olimpijska podmnožica množice $[n]$. Sledi, da mora biti najmanjši element množice A večji ali enak moči A', oziroma vsaj za 1 večji od moči A. Posebej so vsi elementi v A večji od 1.

   Če vse elemente v A zmanjšamo za 1, bo najmanjši element večji ali enak moči A, največji pa manjši ali enak $n - 2$, zato je dobljena podmnožica olimpijska podmnožica množice $[n-2]$. Obratno lahko elemente poljubne olimpijske podmnožice množice $[n-2]$ povečamo za 1 in v množico dodamo element n. S tem dobimo olimpijsko podmnožico množice $[n]$.

   Sledi, da velja rekurzivna zveza

   $$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

   Ugotovimo, da sta obe podmnožici množice [1] olimpijski, zato je $a_1 = 2$. Edina podmnožica množice $[2]$, ki ni olimpijska, je $\{1, 2\}$, torej velja $a_2 = 3$. S pomočjo teh pogojev in rekurzivne zveze dobimo, da je število olimpijskih podmnožic množice $[n]$ enako $(n+2)$-temu Fibonaccijevemu številu.

4. Pokažimo, da obstaja $(n+1)^{n-1}$ ustreznih zaporedij. Pogoje naloge spremenimo tako, da k n stolom dodamo stol označen z $n+1$ in jih v naraščajočem zaporedju postavimo v krog. Namesto da oseba jezno odide domov, bo nadaljevala po krogu in sedla na prvi prost stol.

   Naj ima vsaka oseba najljubši stol a_i, pri čemer je lahko ta stol tudi tisti, označen z $n+1$. Možnih zaporedij $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je $(n+1)^n$.

   Ko se vsi posedejo, bo en stol ostal prazen. Opazimo, da je v primeru, ko nobena vrednost a_i ni enaka $n+1$, to, da pred spremembo pogojev nekdo jezno odide domov, ekvivalentno temu, da je po spremembi pogojev stol z oznako $n+1$ zaseden.

   Če zaporedje ustreza pogojem naloge, vidimo, da bo po spremembi pogojev prost natanko stol z oznako $n+1$. Velja tudi obratno – če bo prost stol z oznako $n+1$, dobimo veljavno zaporedje pred spremembo pogojev, pri katerem nihče ne bo jezno odšel domov.

   Določimo sedaj vsa taka zaporedja, pri katerih je prazen stol z oznako $n+1$. Vsa možna zaporedja razdelimo v $(n+1)^{n-1}$ skupin po $(n+1)$ zaporedij tako, da so v isti skupini zaporedja oblike

$$(a_1, \ldots, a_n), \quad (a_1+1, \ldots, a_n+1), \quad \ldots, \quad (a_1+n, \ldots, a_n+n),$$

   kjer vse vrednosti gledamo po modulu $n+1$.

   Opazimo, da po zamiku vrednosti za enako število mest zamaknemo tudi stol, ki bo prazen. V vsaki skupini nam torej natanko eno zaporedje da sedežni red, pri katerem je prazen stol z oznako $n+1$. Sledi, da $(n+1)^{n-1}$ zaporedij ustreza pogoju naloge.